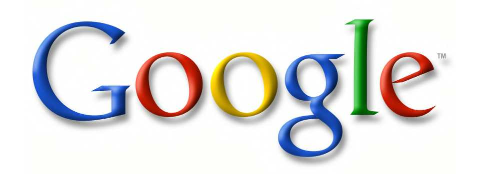



Hosted by Google

Wenden!

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite!

Kleine mathematische Bibliothek

aus der **Sammlung Göschen.**

Jedes Bändchen elegant gebunden 80 Pfennig.

Sammlung Göschen

Höhere Analysis

Zweiter Teil

Integralrechnung

von

Dr. Friedrich Junker
Professor am Realgymnasium und der Realanstalt in Ulm

Mit 87 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1899

Druck und Einband von Carl Rembold & Co. in Heilbronn.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Integration einfacher Differentiale. Integrationsmethoden.

II. Abschnitt.

Integration rationaler Differentiale.





Seite

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie des Raums.

VIII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Statik.

IX. Abschnitt.

Das Doppelintegral und seine Anwendung.

X. Abschnitt.

Exkurs auf das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen.



I. Abschnitt.

Integration einfacher Differentiale. Integrationsmethoden.

§ 1. Aufgabe der Integralrechnung. Begriff des unbestimmten Integrals.

Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der Aufgabe zu einem gegebenen Differential die ursprüngliche Funktion aufzusuchen. In diesem Sinn ist sie als die Umkehrung der Differentialrechnung anzusehen. Beispielsweise ist der Quotient $\frac{dy}{dx} = 4\,x^3$ offenbar durch Differentiation nach x hervorgegangen aus

$$y = x^4.$$

Man nennt $y = x^4$ das Integral des Differentials $dy = 4\,x^3\,dx$ und schreibt

$$y = \int 4\,x^3\,dx = x^4.$$

Erklärung. Das Integral des Differentials $dy = f(x)\,dx$, geschrieben

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) \qquad (1)$$

und gelesen: „Integral f (x) dx“ ist die Funktion,

welche nach x abgeleitet f (x) liefert. Dasselbe ist somit definiert durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \int f(x)\, dx}{dx} = f(x) = F'(x). \qquad (2)$$

Fügt man der Funktion F (x) additiv eine beliebige Konstante C bei, so folgt aus

$$y = \int f(x)\, dx + C = F(x) + C$$

durch Ableitung nach **x**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(F(x) + C)}{dx} = F'(x).$$

Die durch Integration aus f (x) dx unmittelbar hervorgegangene Funktion F (x) kann also um eine beliebige Konstante vermehrt (oder vermindert) werden, ohne dass sie ihre Eigenschaft als Integral von f (x) dx verliert.

Erklärung. Man nennt deshalb

$$y = \int f(x)\, dx + C = F(x) + C$$

das unbestimmte Integral von f (x) dx und bezeichnet C als Integrationskonstante.

So heisst $y = ax^2 + C$ das unbestimmte Integral von 2 a x d x, da man stets zu dem gleichen Differential gelangt, welchen Wert auch C erhalten mag.

Satz. Das Integral des Differentials f (x) dx ist bis auf eine Konstante C eindeutig bestimmt, welche vollständig willkürlich gewählt werden kann.

§ 2. Geometrische Bedeutung des unbestimmten Integrals.

Das aus dy = 2 ax dx durch Integration hervorgehende unbestimmte Integral

$$y = ax^2 + C$$

stellt die um $y = C$ in der Richtung der y-Axe verschobene Parabel $y = ax^2$ dar und bei willkürlichem C somit eine Schar von solchen, die sämtlich in den Schnittpunkten mit einer Parallelen zur y-Axe gleiche Neigung gegen die x-Axe besitzen; denn diese ist bestimmt durch (Fig. 1)

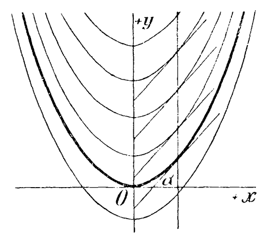


Fig. 1.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,(ax^2 + C)}{dx} = 2\,ax^2.$$

Somit gilt der

Satz: *Das unbestimmte Integral*

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

des Differentials $dy = f(x)\,dx$ *stellt eine Schar von kongruenten ebenen Kurven dar, die erzeugt wird, indem man die Hauptkurve* $y = F(x)$ *in der Richtung der y-Axe verschiebt.*

§ 3. Integration einfacher Integralformen.

Um ein gegebenes Integral $\int f(x)\,dx = F(x)$ zu bilden, hat man in den Formeln der Differentialrechnung diejenige Funktion $F(x)$ zu suchen, für welche

$$F'(x) = f(x) \text{ ist.}$$

Indem man die Formeln der einfachsten Differentiale

$$d\,F(x) = f(x)\,dx \text{ in } F(x) = \int f(x)\,dx$$

umschreibt, erhält man die folgenden Integralformen, in denen der Kürze halber die Integrationskonstante C weggelassen ist.

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$

2. $\int \frac{dx}{x} = \log x$

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

4. $\int e^x\,dx = e^x$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,cot} x$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x$

§ 4. Integration einer Summe oder Differenz.

Nach § 17 der Differentialrechnung ist

$$\frac{d\,(Au \pm B\,v)}{dx} = A\,\frac{du}{dx} \pm B\,\frac{dv}{dx} \tag{1}$$

oder

$$d\,(Au \pm B\,v) = \left(A\,\frac{du}{dx} \pm B\,\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

Hieraus folgt durch beiderseitige Integration

$$Au \pm B\,v = \int \left(A\,\frac{du}{dx} \pm B\,\frac{dv}{dx}\right)\,dx. \tag{2}$$

Setzen wir hierin

$$u = \int f\,(x)\,dx,\ \ v = \int \varphi\,(x)\,dx,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{du}{dx} = f\,(x),\ \frac{dv}{dx} = \varphi\,(x),$$

so geht die Gleichung (2) über in

$$A \int f(x)\,dx \pm B \int \varphi(x)\,dx = \int [A f(x) \pm B \varphi(x)]\,dx, \qquad (3)$$

womit gewonnen ist der

Satz: Das Integral einer Summe, bezw. Differenz ist gleich der Summe bezw. Differenz der Integrale der einzelnen Glieder.

Für $B = o$ geht die Gleichung (3) über in

$$A \int f(x)\,dx = \int A f(x)\,dx:$$

Satz: Konstante Faktoren dürfen vor das Integrationszeichen gesetzt werden.

Beispiele.

1. $\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\,dx = C + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$

2. Aus $1 : 1 + x^2 = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ folgt durch Integration

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

und hieraus beispielsweise für $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

3. $\int (A \cos x \pm B \sin x)\,dx = A \sin x \mp B \cos x + C.$

4. $\int \left(a x^3 + \frac{b}{\sqrt{x}} + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \frac{a}{4} x^4 + 2 b \sqrt{x} + c \arcsin x + C.$

§ 5. Integration durch Substitution.

Soll das Integral ermittelt werden

$$\int f[\varphi(x)]\,dx,$$

so ist es häufig zweckmässig, durch die Substitution

$$\varphi(x) = y$$

eine neue Veränderliche einzuführen. Folgt hieraus durch Auflösung nach x $x = \psi(y)$, so ist $dx = \psi'(y)\,dy$ und geht das Integral über in

$$\int f(y)\,\psi'(y)\,dy = F(y) + C.$$

Setzt man nach Ausführung desselben wieder $\varphi(x) = y$, so ergiebt sich als gesuchtes Integral

$$F[\varphi(x)] + C.$$

Erklärung. Man nennt den hiedurch angezeigten Weg zur Ermittlung eines Integrals „Integration durch Substitution". Dieses Verfahren wird stets mit Vorteil angewendet, wenn unter dem Integralzeichen eine Funktion von einer Funktion auftritt.

Die folgenden Beispiele werden die Fruchtbarkeit dieser Methode darthun.

1. $$\int (a + bx)^n\,dx = \frac{1}{b}\int y^n\,dy = \frac{y^{n+1}}{b(n+1)} = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$$

2. $$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dy}{y} = ly = l(x+a) \qquad [a + x = y]$$

3. $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{b}\,l(a+bx) \qquad [a + bx = y]$$

4. $$\int \sqrt{(a+bx)^n}\,dx = \frac{1}{b}\int y^{\frac{n}{2}}\,dy = \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}+1}}{b\left(\frac{n}{2}+1\right)} \qquad [a + bx = y]$$

5. $$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int e^y\,dy = \frac{1}{k}\,e^{kx} \qquad [kx = y]$$

$$6.\ \int \sin(a+bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx)$$

$$7.\ \int \cos(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx)$$

$$8.\ \int \frac{dx}{\cos^2(a+bx)} = \frac{1}{b}\operatorname{tg}(a+bx)$$

$$9.\ \int \frac{dx}{\sin^2(a+bx)} = -\frac{1}{b}\cot(a+bx)$$

[a + bx = y] (für 6.–9.)

$$10.\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} y = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$11.\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

[x = ay] (für 10.–11.)

$$12.\ \int \frac{x\,dx}{a^2+b\,x^2} = \frac{1}{2b}\,l\,(a^2+bx^2) \qquad [bx^2 = y]$$

$$13.\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$14.\ \int \operatorname{tg} x\,dx = -\log\cos x \qquad [\cos x = y]$$

$$15.\ \int \cot x\,d\,x = \log\sin x$$

$$16.\ \int \frac{dx}{\sin x} = \log\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y\right]$$

§ 6. Integration durch trigonometrische Substitution.

Häufig ist es auch vorteilhaft, trigonometrische Funktionen durch Substitution einzuführen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

1. Setzt man $bx = a \sin\varphi$, woraus folgt $bdx = a\cos\varphi\,d\varphi$, so geht das Integral über in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{b} \int d\varphi$$

$$= \frac{1}{b} \varphi = \frac{1}{b} \arcsin \left(\frac{bx}{a}\right).$$

2. Hat man zu integrieren $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$, so kann man setzen $bx = a \operatorname{tg} \varphi$, woraus folgt $dx = \frac{a}{b \sin^2 \varphi} d\varphi$.

Das gegebene Integral geht alsdann über in

$$\frac{1}{ab} \int d\varphi = \frac{1}{ab} \varphi = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a}.$$

3. Um $\int \frac{dx}{x \sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$ zu ermitteln, setze man $bx = \frac{a}{\cos \varphi}$, $\varphi = \arccos \left(\frac{a}{bx}\right)$, dann folgt hieraus $dx = \frac{a}{b} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} d\varphi$ und geht das Integral über in

$$\int d\varphi = \varphi = \arccos \left(\frac{a}{bx}\right).$$

§ 7. Teilweise Integration.

Aus $\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

folgt

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx \text{ und somit}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int \left(u \frac{dv}{dx}\right) dx = uv - \int \left(v \frac{du}{dx}\right) dx \text{ oder} \\ \int u\, dv = uv - \int v\, du \end{array}\right\} \quad (1)$$

Erklärung. Man nennt die durch (1) angezeigte Integration die Methode der „teilweisen oder partiellen Integration“.

Das folgende Beispiel wird dieselbe erläutern.

1. Um $\int x \sin x \, dx$ zu bilden, setze man $x = u$, $\sin x \, dx = dv$, woraus folgt $dx = du$, $-\cos x = v$, so geht das Integral über in

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

2. $\int lx \, dx = x \, lx - \int x \, d \, lx = x \, lx - x.$

3. $$\int x \, lx \, dx = \frac{1}{2} \int l \, x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \, lx - \frac{1}{2} \int x^2 \, d \, l \, x$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \, lx - \frac{1}{2} \int x \, dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 lx - \frac{1}{4} x^2 = \frac{x^2}{4} (2lx - 1)$$
$$= \frac{x^2}{4} (lx^2 - 1)$$

4. $$\int x \, a^x \, dx = \frac{1}{la} \int x \, d \, (a^x) = \frac{1}{la} \left(a^x \, x - \frac{a^x}{la} \right)$$

5. $$\int \operatorname{arc} \sin x \, dx = x \operatorname{arc} \sin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2}$$

6. $\int \operatorname{arc} \cos x \, dx = x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1 - x^2}$

7. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} l \, (1 + x^2)$

8. $\int \operatorname{arc} \cot x \, dx = x \operatorname{arc} \cot x + \frac{1}{2} l \, (1 + x^2)$

9. $\int x \operatorname{arc} \sin x \, dx$ geht mit $du = x \, dx$, $u = \frac{x^2}{2}$;

$$v = \operatorname{arc} \sin x \, dv = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

über in

$$\int x \operatorname{arc} \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \sin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

Das letzte Integral kann auf die gleiche Weise weiterbehandelt werden. Setzt man $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, also $u = \sqrt{1-x^2}$ und $v = x$, so folgt

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$ somit ist

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x,$$ daher

$$\int x\arcsin x\,dx = \frac{1}{4}(2x^2-1)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}.$$

§ 8. Integration durch allmähliche Reduktion.

1. Die teilweise Integration liefert häufig das Mittel, Integrale gewisser Funktionen auf einfachere derselben Art zurückzuführen und dieselben durch eine Art von Reihenentwicklung zu ermitteln.

Beispielsweise erhält man

$$J_2 = \int\sin^2\varphi\,d\varphi = -\int\sin\varphi\,d\cos\varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int\cos^2\varphi\,d\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi + \int(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi - J_2.$$

Hieraus folgt

$$2J_2 = -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi$$
$$J_2 = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi).$$

Erklärung. Man nennt diese Art der Ermittlung eines Integrals „Integration durch allmähliche Reduktion."

2. Die Reduktionsformeln für

$$J_k = \int \sin^k \varphi \, d\varphi \text{ und } J_{-k} = \int \sin^{-k} \varphi \, d\varphi,$$

wo $k > o$ ist.

Mit Hilfe der teilweisen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} J_k &= \int \sin\varphi \sin^{k-1}\varphi \, d\varphi = -\int \sin^{k-1}\varphi \, d\cos\varphi \\ &= -\cos\varphi \sin^{k-1}\varphi + (k-1)\int \sin^{k-2}\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \\ &= -\cos\varphi \sin^{k-1}\varphi + (k-1)[J_{k-2} - J_k]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Reduktionsformel

$$\left.\begin{aligned} kJ_k &= -\cos\varphi \sin^{k-1}\varphi + (k-1) J_{k-2} \text{ oder} \\ J_k &= -\frac{1}{k}\cos\varphi \sin^{k-1}\varphi + \frac{k-1}{k} J_{k-2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für $k = n, n-2, n-4, \ldots$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{n}\cos\varphi \sin^{n-1}\varphi + \frac{n-1}{n} J_{n-2} && \Big| \; 1 \\ J_{n-2} &= -\frac{1}{n-2}\cos\varphi \sin^{n-3}\varphi + \frac{n-3}{n-2} J_{n-4} && \Big| \; \frac{n-1}{n} \\ J_{n-4} &= -\frac{1}{n-4}\cos\varphi \sin^{n-5}\varphi + \frac{n-5}{n-4} J_{n-6} && \Big| \; \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

und für ein gerades n als letzte Gleichungen

$$\begin{aligned} J_4 &= -\frac{1}{4}\cos\varphi \sin^3\varphi + \frac{3}{4} J_2 && \Big| \; \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{5}{6} \\ J_2 &= -\frac{1}{2}\cos\varphi \sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi, && \Big| \; \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \end{aligned}$$

bezw. für ein ungerades n

$$\begin{aligned} J_5 &= -\frac{1}{5}\cos\varphi \sin^4\varphi + \frac{4}{5} J_3 && \Big| \; \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{6}{7} \\ J_3 &= -\frac{1}{3}\cos\varphi \sin^2\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi && \Big| \; \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen mit den angeschriebenen Faktoren durchmultipliziert und addiert, so ergeben sich die allgemeinen Endformeln

α) für ein gerades n

$$\int \sin^n \varphi\, d\varphi = -\frac{1}{n}\cos\varphi \sin^{n-1}\varphi - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cos\varphi\sin^{n-3}\varphi$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cos\varphi\sin^{n-5}\varphi - \cdots$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cos\varphi\sin^3\varphi$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}(\cos\varphi\sin\varphi - \varphi) \quad (2)$$

β) für ein ungerades n

$$\int \sin^n \varphi\, d\varphi = -\frac{1}{n}\cos\varphi \sin^{n-1}\varphi - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cos\varphi\sin^{n-3}\varphi$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cos\varphi\sin^{n-5}\varphi - \cdots$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cos\varphi\sin^4\varphi$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}[\cos\varphi(\sin^2\varphi + 2)]. \quad (3)$$

Setzt man in der Formel (1) $k-2 = -i$, $k = -i+2$ und ersetzt man nachträglich wieder i durch k, so ergiebt sich die Reduktionsformel

$$J_{-k} = \int \sin^{-k}\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{k-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{k-1}\varphi} + \frac{k-2}{k-1}J_{-k+2}, \quad (4)$$

wo k als positiv vorausgesetzt ist.

Auf ähnliche Weise wie oben erhält man auch hiefür die beiden Endformeln

δ) für ein gerades n:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^n \varphi} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-3}\varphi} - \cdots$$
$$-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}$$
$$-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \qquad (5)$$

ε) für ein ungerades n:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^n \varphi} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-3}\varphi} - \cdots$$
$$-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{5}{4}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi}$$
$$-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \mathrm{l\,tg}\,\frac{\varphi}{2}\right] \qquad (6)$$

3. Mit Hilfe der Formel für die partielle Integration erhalten wir ebenso die Reduktionsformel

$$\int x^k e^x \, dx = x^k e^x - k \int x^{k-1} e^x \, dx \qquad (7)$$

und wenn wir dieselbe wiederholt auf die Integrale $\int x^{k-1} e^x \, dx$, $\int x^{k-2} e^x \, dx$, ... anwenden, schliesslich die Endformel

$$\int x^k e^x \, dx = x^k e^x - k x^{k-1} e^x + k(k-1) x^{k-2} e^x - \cdots \qquad (8)$$
$$= e^x \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i \binom{k}{i} i!\, x^{k-i}.$$

4. Ist k von 1 verschieden, so gilt ebenso die Rekursionsformel

$$\int \frac{e^x \, dx}{x^k} = -\frac{e^x}{(k-1)\,x^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int \frac{e^x \, dx}{x^{k-1}}, \qquad (9)$$

welcher die Endformel entspricht

$$\int \frac{e^x \, dx}{x^k} = -\frac{e^x}{x^k}\left\{\frac{x}{k-1} + \frac{x^2}{(k-1)(k-2)} + \frac{x^3}{(k-1)(k-2)(k-3)} + \cdots\right\} \qquad (10)$$

5. Aehnliche Rekursionsformeln ergeben sich mit Hilfe der teilweisen Integration auch für die folgenden Integrale:

$$\int x^k \sin x \, dx = -x^k \cos x + k \int x^{k-1} \cos x \, dx \tag{11}$$

$$\int x^k \cos x \, dx = x^k \sin x - k \int x^{k-1} \sin x \, dx \tag{12}$$

$$\int x^{-k} \sin x \, dx = -\frac{\sin x}{(k-1) x^{k-1}} + \frac{1}{k-1} \int \frac{\cos x \, dx}{x^{k-1}} \tag{13}$$

$$\int x^{-k} \cos x \, dx = -\frac{\cos x}{(k-1) x^{k-1}} - \frac{1}{k-1} \int \frac{\sin x \, dx}{x^{k-1}} \tag{14}$$

für welche sich entsprechende Endformeln bilden lassen.

§ 9. Integration durch unendliche Reihen.

Lässt sich ein Integral $\int f(x) \, dx$ nicht in endlicher Form darstellen, so ist es häufig zweckmässig, die Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes oder auf irgend eine andere Weise in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln und diese zu integrieren.

Erhält man nach Maclaurin die Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \tag{1}$$

welche innerhalb eines gewissen Gebiets konvergent sei, dann ergiebt sich hieraus durch Integration die weitere Reihe

$$\int f(x) \, dx = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots, \tag{2}$$

welche in demselben Gebiet konvergent ist.

Beispiele.

1. $$\int \frac{e^{kx}}{x} dx = \int \left\{ \frac{1}{x} + k + \frac{k^2 x}{2!} + \frac{k^3 x^2}{3!} + \cdots \right\} dx$$

$$= C + lx + \frac{kx}{1!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{k^3 x^3}{3!} + \cdot$$

2. $$\int \frac{\cos x}{x} dx = \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots \right\} dx$$
$$= C + lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{6} \cdot \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Anmerkung. Die vorstehenden Potenzreihen liefern das Mittel, neue transcendente Funktionen, wie $\int \frac{e^{kx}}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, u. s. w. für specielle Werte von x näherungsweise zu berechnen.

II. Abschnitt.

Integration rationaler Differentiale.

§ 10. Hilfssätze aus der Algebra.

1. Die rationalen Funktionen einer Veränderlichen x zerfallen in ganze und gebrochene. Vergl. Differentialrechnung § 2.

Alle ganzen algebraischen rationalen Funktionen sind von der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1}$$

und können daher nach § 4 unmittelbar integriert werden.

Jede gebrochene rationale Funktion kann auf den Bruch zurückgeführt werden

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}, \tag{2}$$

wo $m \gtreqless n$ sein kann.

Erklärung. Für $m \geqq n$ heisst die Funktion (2) ein unechter, für $m < n$ dagegen ein echter Bruch.

Für den ersten Fall gilt der

Satz: Jeder unechte Bruch kann in eine ganze Zahl und einen echten Bruch übergeführt werden.

Man beweist dies am einfachsten auf dem Weg der gewöhnlichen Division. So ist beispielsweise

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}$$

2. **Satz.** Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grads

$$f(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n=0$$

hat mindestens eine (reelle oder imaginäre) Wurzel $x=a$, für welche also $f(a)=0$ ist.

Erhält man bei der Division von $x-a$ in $f(x)$ die Funktion $\varphi(x)$ als Quotienten und R als Rest, so gilt die Gleichung

$$f(x)=(x-a)\varphi(x)+R.$$

Da nun für $x=a$ $f(a)=0$ ist, so folgt hieraus $R=0$. Es ist somit $f(x)=(x-a)\varphi(x)$. Hieraus schliesst man, dass auch die Gleichung $\varphi(x)=0$, welche vom $(n-1)^{ten}$ Grad in x ist, mindestens eine Wurzel $x=b$ besitzt. Es ist somit $\varphi(x)=(x-b)\psi(x)$, wo $\psi(x)$ vom $(n-2)^{ten}$ Grad in x ist u.s.w. Daher gilt allgemein der

Satz: Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grads hat n reelle oder imaginäre Wurzeln.

Sind dieselben $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so lässt sich $f(x)$ auf die Form bringen:

$$f(x)=a_n(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

Satz. Jede algebraische Funktion n^{ten} Grads lässt sich als Produkt von n-Linearfaktoren darstellen.

Werden mehrere Wurzeln von $f(x)=0$ einander gleich, treten z. B. die Wurzeln $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$, bezw. λ-, μ-, ν-, ... fach auf, so ist

$$f(x)=a_n(x-a_1)^{\lambda}(x-a_2)^{\mu}(x-a_3)^{\nu}\ldots,$$

wo $\lambda+\mu+\nu+\cdots=n$ ist.

3. Ist a eine positive oder negative ganze Zahl, also a^2 jedenfalls positiv, so kann die Gleichung $x^2=-a^2$ durch keinen positiven oder negativen reellen Wert von x befriedigt werden. Zieht man beiderseits die Quadratwurzel aus, so ergeben sich als Lösungen die beiden Werte

$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm a\sqrt{-1}.$$

Erklärung. Die so entstandenen Zahlen heissen imaginär. Man bezeichnet die Quadratwurzel aus -1 allgemein mit dem Buchstaben i und nennt $\pm\sqrt{-1}=\pm i$ die positive, bezw. negative imaginäre Einheit.

Hieraus folgt $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1, \cdots$

Erklärung. Setzt sich eine Zahl wie $a+ib$ aus einem reellen Bestandteil a und einem imaginären Bestandteil ib zusammen, wo a und b reell sind, so heisst eine solche eine komplexe Zahl.

Erklärung. Die beiden imaginären Zahlen $a+ib$ und $a-ib$, die sich nur in dem Vorzeichen des imaginären Bestandteils unterscheiden, heissen konjugiert komplex oder kurz konjugiert.

Für dieselben gilt der

Satz: Das Produkt zweier konjugiert komplexen Zahlen ist eine reelle Zahl

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2.$$

Für die Rechnung mit komplexen Zahlen ergeben sich folgende Regeln:

$$\left.\begin{array}{l}(A+iB)\pm(C+iD)=(A\pm C)+i(B\pm D)\\ \text{und ebenso}\\ (A-iB)\pm(C-iD)=(A\pm C)-i(B\pm D)\end{array}\right\}$$

Beachtet man bei der Multiplikation und Division, dass $i^2 = -1$ ist, so erhalten wir weiter

$$\left.\begin{array}{l}(A+iB)(C+iD)=(AC-BD)+i(AD+BC)\\ (A-iB)(C-iD)=(AC-BD)-i(AD+BC)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A+iB}{C+iD}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}+i\frac{BC-AD}{C^2+D^2}\\ \frac{A-iB}{C-iD}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}-i\frac{BC-AD}{C^2+D^2}\end{array}\right\}$$

Aus diesen Formeln folgen die

Sätze: Die Summe, Differenz, das Produkt und der Quotient zweier komplexen Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl.

Ersetzt man hiebei die beiden gegebenen Zahlen durch ihre konjugierten, so geht auch das Resultat dieser Operation in den konjugierten Wert über.

Setzt man eine komplexe Zahl, z. B. $A+iB=0$, so folgt hieraus $-A=iB$ oder $A^2=-B^2$ oder $A^2+B^2=0$. Da aber der Annahme gemäss A und B reell sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn sowohl A als auch B verschwindet.

Satz: Eine komplexe Zahl ist nur dann gleich Null, wenn sowohl der reelle wie der imaginäre Bestandteil derselben verschwindet.

Enthält die algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten $f(x)=0$ die Wurzel $x=A+iB$, d. h. ist $f(A+iB)=0$, so wird dieselbe auch durch den konjugierten Wert derselben $A-iB$ befriedigt, d. h. es

ist auch $f(A-iB)=0$, wie man sofort erkennt, wenn man diese Funktionen nach dem Lehrsatz von Taylor nach Potenzen von i entwickelt.

Satz: Hat eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten eine imaginäre Wurzel $A+iB$, so ist notwendig auch der konjugierte Wert $A-iB$ der letzteren eine Wurzel derselben Gleichung.

§ 11. Integration echt gebrochener rationaler Funktionen. Partialbruchzerlegung.

Um die echt gebrochene rationale Funktion

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_m x^m}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_n x^n}, \text{wo also } m<n \text{ ist}, \quad (1)$$

zu integrieren, zerlege man nach dem vorigen Paragraphen den Nenner $F(x)$ in seine n-Linearfaktoren

$$F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-n),$$

die zunächst sämtlich verschieden sein sollen, und suche hierauf den Bruch in n-Einzelbrüche oder Partialbrüche mit den Nennern $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-n$ darzustellen. Bezeichnet man die Zähler dieser Brüche mit A, B, C, ..., N, so kann man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots+\frac{N}{x-n}, \quad (2)$$

wo die Brüche rechts sofort integriert werden können. Man erhält

$$\int\frac{f(x)dx}{F(x)}=A\,l(x-a)+B\,l(x-b)+\cdots+N\,l(x-n) \quad (3)$$

Hiebei ist zu bemerken, dass an Stelle von $l(x-a)$ auch $l(a-x)$ gesetzt werden darf, denn es ist

$$l(x-a)=l(a-x)+l(-1),$$

wo $l(-1)$ als Teil der Integrationskonstanten angesehen werden kann.

Multipliziert man die Gleichung (2) mit dem Nenner $F(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-n)$ durch, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$\begin{aligned} f(x) = & A(x-b)(x-c)\cdots(x-n) \\ & + B(x-a)(x-c)\cdots(x-n) + \cdots \\ & + N(x-a)(x-b)\cdots(x-m), \end{aligned} \tag{4}$$

welche zu erkennen giebt, dass für $x=a$, $x=b$, $\cdots$, $x=n$ sämtliche Glieder der rechten Seite mit Ausnahme des ersten, zweiten, ..., n^{ten} verschwinden. Setzt man daher der Reihe nach $x=a$, $x=b$, $\cdots$, $x=n$ so erhält man die Zähler A, B, ..., N unmittelbar in der Form

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-n)} \\ B &= \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-n)} \\ &\vdots \\ N &= \frac{f(n)}{(n-a)(n-b)\cdots(n-m)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Anmerkung. Da die Gleichung (4) eine identische ist, so müssen die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich sein. Auf diesem Wege ergeben sich nlineare Gleichungen, aus denen sich die Zähler A, B, ..., N ebenfalls ermitteln lassen.

Beispiel.

1. Es sei das Integral zu bilden

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} = \int \frac{3x^2 - 10x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\, dx.$$

Da der Nenner die Linearfaktoren $x-1$, $x-2$,

$x+2$ enthält und daher $a=1$, $b=2$, $c=-2$ ist, so erhält man

$$f(1)=-3,\ f(2)=-4,\ f(-2)=36$$

und daher nach (5)

$$A=\frac{f(1)}{(1-2)(1+2)}=\frac{-3}{-3}=1$$

$$B=\frac{f(2)}{(2-1)(2+2)}=\frac{-4}{1.4}=-1$$

$$C=\frac{f(-2)}{(-2-1)(-2-2)}=\frac{36}{12}=3.$$

Es ist somit

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

$$\int\frac{f(x)}{(F x)}dx=l(x-1)-l(x-2)+3\,l(x+2)+C$$

$$=l\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2}+C.$$

2. Das Integral zu bilden

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}=\int\frac{2x+34}{x^3-2x^2-11x+12}dx.$$

Der Nenner enthält die Linearfaktoren $x-4$, $x-1$, $x+3$, daher kann man setzen

$$\frac{2x+34}{x^3-2x^2-11x+12}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}.$$

Hieraus folgt

$$2x+34=A(x-1)(x+3)+B(x-4)(x+3)$$
$$+C(x-4)(x-1)$$

oder

$$2x+34=x^2(A+B+C)+x(2A-B-5C)$$
$$-3A-12B+4C.$$

Zur Bestimmung der Zähler erhält man also die Gleichungen

$A+B+C=0,\ 2A-B-5C=2,\ -3A-12B+4C=34,$
welche aufgelöst geben

$$A=2,\quad B=-3,\quad C=1.$$

Daher ist

$$\int\frac{f(x)\,dx}{F(x)}=2\int\frac{dx}{x-4}-3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+3}$$
$$=2\,l(x-4)-3\,l(x-1)+l(x+3)+C.$$

2. Die Zähler $A, B, C, \ldots, N$ der Partialbrüche (2) lassen sich auch mittelst Differentialrechnung leicht bestimmen.

Ist a eine Wurzel der Gleichung $F(x)=0$, so enthält $F(x)$ den Faktor $x-a$ und kann somit auf die Form gebracht werden

$$F(x)=(x-a)\,\varphi(x).$$

Um nun aus dem gesamten Bruch (1) einen Partialbruch mit konstantem Zähler und dem Nenner $x-a$ abzusondern, setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \text{ oder}$$
$$f(x)=A\,\varphi(x)+(x-a)\,\psi(x).$$

Hieraus folgt für $x=a$

$$f(a)=A\,\varphi(a) \text{ und } A=\frac{f(a)}{\varphi(a)}.$$

Die Berechnung von $\varphi(a)$ lässt sich umgehen, denn aus $F(x)=(x-a)\,\varphi(x)$ folgt durch Ableitung

$$F'(x)=\varphi(x)+(x-a)\,\varphi'(x)$$

und hieraus für $x=a$.

$$\varphi(a)=F'(a), \text{ d. h. es ist } A=\frac{f(a)}{F'(a)}.$$

Sind also $a, b, c, \ldots, n$ die Wurzeln von $F(x)=0$, so ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, B = \frac{f(b)}{F'(b)}, C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots, N = \frac{f(n)}{F'(n)}.$$

Der Ausdruck (1) erhält somit allgemein die Zerlegung in Partialbrüche .

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{(x-a)F'(a)} + \frac{f(b)}{(x-b)F'(b)} + \cdots + \frac{f(n)}{(x-n)F'(n)}, \quad (6)$$

deren Integration auf Logarithmen führt.

Multipliziert man die Gleichung (6) mit F(x) durch, so erhält man die „Interpolationsformel von Lagrange"

$$f(x) = \frac{f(a)F(x)}{(x-a)F'(a)} + \frac{f(b)F(x)}{(x-b)F'(b)} + \cdots + \frac{f(n)F(x)}{(x-n)F'(n)}, \quad (7)$$

welche dazu dient, eine den Grad n nicht erreichende rationale Funktion f(x) zu bestimmen, welche für die n Zahlenwerte a, b, c, …, n der Veränderlichen x die Werte f(a), f(b), f(c), …, f(n) annimmt.

Beispiel.

Es sei der Ausdruck zu integrieren

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{-4x^2 - 16x + 38}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}.$$

Durch Auflösung der Gleichung $F(x) = 0$ erhält man die Wurzeln —2, 4, 1. Daher kann man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-1}.$$

Zur Bestimmung der Zähler A, B, C bilde man nun $F'(x) = 3x^2 - 6x - 6$, dann ist $F'(-2) = 18$,

$F'(4)=18$, $F'(1)=-9$; $f(-2)=54$, $f(4)=-90$, $f(1)=18$ und somit

$$A=\frac{54}{18}=3,\ B=\frac{-90}{18}=-5,\ C=\frac{18}{-9}=-2.$$

Daher ergiebt sich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-4}-\frac{2}{x-1}$$

und als Integral der Ausdruck

$$\int\frac{f(x)\,dx}{(F(x)}=3\,l(x+2)-5\,l(x-4)-2\,l(x-1)+C$$
$$=l\,\frac{(x+2)^3}{(x-4)^5(x-1)^2}+C.$$

3. Treten im Nenner imaginäre Wurzelfaktoren auf, so kann man die Zerlegung in Partialbrüche in derselben Weise vornehmen wie oben.

Hat man zu der Wurzel $a+ib$ der Gleichung $F(x)=0$ oder zu dem Faktor $(x-a-ib)$ von $F(x)$ als Nenner eines Partialbruches den Zähler

$$A=\frac{f(a+ib)}{F'(a+ib)}=p+iq \tag{8}$$

erhalten, so erhält man nach § 9, 3 zu der konjugierten Wurzel $a-ib$ oder zu dem konjugierten Wurzelfaktor $x-a+ib$ von $F(x)$ notwendig den Zähler

$$B=\frac{f(a-ib)}{F'(a-ib)}=p-iq \tag{9}$$

und alsdann durch Vereinigung der beiden konjugierten Partialbrüche

$$\frac{p+iq}{x-a-ib}+\frac{p-iq}{x-a+ib}=\frac{2p(x-a)-2bq}{(x-a)^2+b^2}. \tag{10}$$

Die Integration liefert alsdann

$$p\int\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}dx-2bq\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^2+b^2} \tag{11}$$
$$=p\,l\{(x-a)^2+b^2\}-2q\operatorname{arctg}\frac{x-a}{b}.$$

Dieses Resultat kann angeschrieben werden, sobald $p+iq$ bekannt ist.

Satz: Enthält der Nenner imaginäre Linearfaktoren $a+ib$ und $a-ib$, so bestimmen sich die Zähler der betreffenden Partialbrüche nach (8) und (9), und können alsdann die betreffenden Partialbrüche unmittelbar nach (11) angeschrieben werden.

Beispiel.

1. Das Integral $\int\frac{dx}{x^3-1}$ ist durch Partialbruchzerlegung auszuwerten.

Der Nenner x^3-1 zerfällt in die Linearfaktoren

$$x-1;\ x-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right\},\ x-\left\{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\cdot\right\}$$

Daher ergiebt sich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{C}{x-1}+\frac{A}{x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}}+\frac{B}{x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}}.$$

Nun ist $f(x)=1$, $F(x)=x^3-1$, $F'(x)=3x^2$, daher

$$C=\frac{1}{F'(1)}=\frac{1}{3};$$

$$A=\frac{1}{F'\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{1}{6}+\frac{i}{6}\sqrt{3};$$

$$B=\frac{1}{F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{1}{6}-\frac{i}{6}\sqrt{3};$$

somit ist nach der obigen Bezeichnung

$$p = -\frac{1}{6},\ q = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

daher ergiebt sich als gesuchtes Integral

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} l(x-1) - \frac{1}{6} l(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

§ 12. Partialbruchzerlegung bei mehrfach vorkommenden Wurzelfaktoren im Nenner.

α) **Lehrsatz:** Enthält der Nenner $F(x)$ den Faktor $x - a$ k-fach, so lässt sich der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in zwei Teile von folgender Form zerlegen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1} \varphi(x)}, \qquad (1)$$

wo A eine Konstante und $f_1(x)$ eine rationale Funktion von x ist, deren Grad kleiner als der von $f(x)$ ist.

Bringt man die rechte Seite der Gleichung (1) auf gleiche Benennung, so folgt durch Vergleichung der beiderseitigen Zähler

$$f(x) = A_k \varphi(x) + (x - a) f_1(x). \qquad (2)$$

Hieraus folgt, dass, wenn $f(x)$ vom Grad m ist, $f_1(x)$ nicht höher als vom Grad $m - 1$ sein kann und weiter für $x = a$

$$f(a) = A_k \varphi(a) \text{ oder } A_k = \frac{f(a)}{\varphi(a)},$$

womit A bestimmt ist.

Setzt man den Wert von A in (2) ein und löst nach $f_1(x)$ auf, so ergiebt sich hiefür der Ausdruck

$$f_1(x) = \frac{f(x)\varphi(a) - f(a)\varphi(x)}{(x-a)\varphi(a)},$$

dessen Zähler durch $x - a$ teilbar ist, welche Werte die Funktionen f und φ auch annehmen mögen.

Wie sich aus $\frac{f(x)}{F(x)}$ der Partialbruch $\frac{A_k}{(x-a)^k}$ abscheiden lässt, so kann auch das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (1) weiter zerlegt werden:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)} = \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}\varphi(x)}.$$

Man findet

$$f_1(x) = A_{k-1}\varphi(x) + (x-a) f_2(x)$$

und hieraus $A_{k-1} = \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$ u. s. w.

Fährt man so fort, so gelangt man zu folgender Darstellung des Bruches (1)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \cdots$$
$$+ \frac{A_1}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \qquad (3)$$

und erhält den

Satz: Enthält die echtgebrochene Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ den Faktor $(x-a)$ k-fach im Nenner, so lässt sich dieselbe in der Form (3) in Partialbrüche zerlegen.

β) Berechnung der Zähler $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1$.

Hat man auf irgend welchem Weg gefunden, dass

der Faktor $x - a$ k-fach im Nenner enthalten ist, dieser also auf die Form gebracht werden kann

$$F(x) = (x - a)^k \varphi(x), \tag{4}$$

so schreibe man die Zerlegung (3) an, dann ergiebt sich hieraus, indem man die Glieder rechts auf gleiche Benennung bringt und die beiderseitigen Zähler miteinander vergleicht

$$f(x) = \varphi(x)\left\{A_k + (x-a)A_{k-1} + (x-a)^2 A_{k-2} + \cdots\right\} \\ + (x-a)^k \psi(x).$$

Setzt man hierin

$$h(x) = A_k + (x-a)A_{k-1} + (x-a)^2 A_{k-2} + \cdots \\ + (x-a)^{k-1} A_1,$$

so folgt hieraus durch Ableitung

$$\left.\begin{array}{l} h'(x) = 1.A_{k-1} + 2(x-a)A_{k-2} + 3(x-a)^2 A_{k-3} + \cdots \\ h''(x) = 2!\,A_{k-2} + 3.2(x-a)A_{k-3} \\ \qquad + 4.3(x-a)^2 A_{k-4} + \cdots \\ h'''(x) = 3!\,A_{k-3} + 4.3.2(x-a)A_{k-4} + \cdots \\ \qquad \vdots \end{array}\right\} \tag{5}$$

und hieraus für $x = a$

$$h(a) = A_k,\ h'(a) = 1!\,A_{k-1},\ h''(a) = 2!\,A_{k-2}, \cdots \tag{6}$$

Der Zähler des Bruches (1) nimmt alsdann mit seinen Ableitungen die Gestalt an

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x)h(x) + (x-a)^k \psi(x) \\ f'(x) = \varphi'(x)h(x) + \varphi(x)h'(x) + \cdots \\ f''(x) = \varphi''(x)h(x) + 2\varphi'(x)h'(x) + \varphi(x)h''(x) + \cdots \\ \qquad \vdots \end{array}\right\} \tag{7}$$

woraus für $x=a$ mit Berücksichtigung der Gleichungen (6) folgt

$$\left.\begin{aligned}
f(a) &= A_k\,\varphi(a)\\
f'(a) &= A_k\,\varphi'(a)+\binom{1}{1}1!\,A_{k-1}\,\varphi(a)\\
f''(a) &= A_k\,\varphi''(a)+\binom{2}{1}1!\,A_{k-1}\,\varphi'(a)\\
&\qquad+\binom{2}{2}2!\,A_{k-2}\,\varphi(a)\\
f'''(a) &= A_k\,\varphi'''(a)+\binom{3}{1}1!\,A_{k-1}\,\varphi''(a)\\
&\quad+\binom{3}{2}2!\,A_{k-2}\,\varphi'(a)+\binom{3}{3}3!\,A_{k-3}\,\varphi(a)\\
&\vdots\\
\overset{(k-1)}{f}(a) &= A_k\,\overset{(k-1)}{\varphi}(a)+\binom{k-1}{1}1!\,A_{k-1}\,\overset{(k-2)}{\varphi}(a)+\cdots\\
&\qquad+\binom{k-1}{k-1}(k-1)!\,A_1\,\varphi(a),
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

woraus man die Zähler A berechnen kann.

Beispiel:

1. Es sei zu integrieren

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{-4x^2+3x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B}{x+2}\cdot$$

Bringt man die Brüche rechts auf gleiche Benennung, so folgt durch Vergleichen der beiderseitigen Zähler

a) $-4x^2+3x=A_2(x+2)+A_1(x-1)(x+2)+B(x-1)^2$

und hieraus durch Ableitung

b) $-8x+3 \;=A_2+A_1(2x+1)+2B(x-1)$.

Setzt man in a) $x=-2$, so folgt $B=-\frac{22}{9}\cdot$

Setzt man in a) und b) $x=1$, so erhält man zur

Bestimmung von A_2 und A_1 die Gleichungen:

$-1 = 3A_2,$

$-5 = A_2 + 3A_1,$ woraus folgt $A_2 = -\frac{1}{3}, A_1 = -\frac{14}{9}$.

Man erhält somit als Integral den Ausdruck

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{14}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{22}{9}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{3(x-1)} - \frac{14}{9} l(x-1) - \frac{22}{9} l(x+2).$$

2. $$\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)^2} = ?$$

Man erhält unmittelbar die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-1}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}$$
$$+ \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}.$$

Hieraus folgt

$$2x^2 - 1 = A_2(x+1)^2 + A_1(x-1)(x+1)^2 + B_2(x-1)^2$$
$$+ B_1(x+1)(x-1)^2$$

und hieraus durch Ableitung:

$$4x = 2A_2(x+1) + A_1\{(x+1)^2 + 2(x-1)(x+1)\}$$
$$+ 2B_2(x-1) + B_1\{(x-1)^2 + 2(x-1)(x+1)\}$$

Setzt man in diesen Gleichungen zunächst $x = 1$, dann $x = -1$, so folgt

$$1 = 4A_2 \qquad\qquad 1 = 4B_2$$
$$4 = 4A_2 + 4A_1 \qquad -4 = -4B_2 + 4B_1$$

und hieraus

$$A_2 = \frac{1}{4}, \quad A_1 = \frac{3}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{4}, \quad B_1 = -\frac{3}{4}.$$

Daher ist

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{3}{4(x+1)}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)^2} = x - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4} l(x-1) - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{3}{4} l(x+1) = \frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)} + \frac{3}{4} l \frac{x-1}{x+1}.$$

III. Abschnitt.

Integration irrationaler Differentiale.

§ 13. Die Irrationalität besteht nur in gebrochenen Exponenten von x oder in der n^{ten} Wurzel aus einer linearen Funktion von x.

Erklärung. Das Differential $f(x)\,dx$ heisst irrational, wenn in der Funktion $f(x)$ die Veränderliche x auch unter einem oder mehreren Wurzelzeichen auftritt.

Im folgenden sollen nur die Fälle besprochen werden, in denen sich die irrationalen Differentiale durch Aenderung der Veränderlichen in rationale Differentiale verwandeln lassen.

a) Enthält die Funktion $f(x)$ nur ganze und gebrochene Exponenten von x, deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfache k sei, so setze man

$$x = t^k,\ dx = k\,t^{k-1}\,dt,$$

dann wird

$$f(x)\,dx = k\,f(t^k)\,t^{k-1}\,dt \tag{1}$$

ein rationales Differential und kann daher nach den Methoden des vorigen Abschnitts integriert werden.

Beispiele.

1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$. Man setze $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, dann geht das gegebene Integral über in

$$\int \frac{2\,t\,dt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\,l(t+1) = l(t+1)^2 = l\left\{\sqrt{x}+1\right\}^2.$$

Ebenso erhält man mit $x = t^2$

2. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = -x + 4\sqrt{x} - 4\,l(\sqrt{x}+1)$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$. Man setze $x = t^6$, so folgt $dx = 6\,t^5\,dt$ und

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} = \int \frac{6\,t^5\,dt}{t^4+t^3} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t+1} = 6\int \left\{t-1+\frac{1}{t+1}\right\}dt$$

$$= 6\left\{\frac{t^2}{2} - t + l(t+1)\right\}$$

$$= 6\left\{\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + l(\sqrt[6]{x}+1)\right\}.$$

4. $\int \frac{x+a}{\sqrt{ax}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}\,(x+3a)$.

b) Ist das zu ermittelnde Integral von der Form

$$J = \int f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

wo $y = \sqrt[n]{\frac{a+\alpha x}{b+\beta x}}$ die n^{te} Wurzel aus einer linearen Funktion von x ist, so setze man

$$\frac{a+\alpha x}{b+\beta x} = y^n \text{ oder } x = \frac{b\,y^n - a}{\alpha - \beta\,y^n}, \tag{3}$$

dann folgt hieraus durch Differentiation

$$dx = n(\alpha b - \beta a)\frac{y^{n-1}\,dy}{(\alpha - \beta\,y^n)^2}, \tag{4}$$

wodurch das Integral (2) übergeht in (5)

$$J = \int f(x,y)\,dx = n(\alpha b - \beta a)\int f\left\{\frac{b\,y^n - a}{\alpha - \beta\,y^n}, y\right\}\frac{y^{n-1}}{(\alpha - \beta\,y^n)^2}\,dy,$$

das eine rationale Funktion von y allein darstellt und nach dem vorigen Abschnitt zu berechnen ist.

Satz: Enthält das Integral (2) keine andere Irrationalität als die n^{te} Wurzel aus einer linearen Funktion von x, so geht dasselbe durch die Substitution (3) und (4) in das Integral einer rationalen Funktion von der Form (5) über.

Beispiele.

1. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + \alpha x}} = \frac{2}{3\,\alpha^2}\sqrt{a + \alpha x}\,(\alpha x - 2\,a)$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + \alpha x}} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{a + \alpha x}$

3. $\int \sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2}{3\,b}\sqrt{(a + bx)^3}$

4. $\int x\sqrt{2\,a - x}\,dx = \frac{2}{15}\sqrt{2a - x}\,(x - 2a)(3\,x + 4a)$

5. $\int \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \arccos\frac{x}{a}$

6. $\int \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\,dx = -\sqrt{a^2 - x^2} - a \arccos\frac{x}{a}$

7. $\int (b + x)\sqrt{a - x}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{(a - x)^5} - \frac{2}{3}(a + b)\sqrt{(a - x)^3}$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x - a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x - a}{a}}.$

§ 14. Ausdruck zweiten Grads unter einer Quadratwurzel.

1. Enthält das zu integrierende Differential neben rationalen Ausdrücken von x keine andere Irrationalität

als die Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion zweiten Grads in x, ist dasselbe also von der Form

$$f(x, y)\,dx, \text{ wo } y = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$

und a, b, c reelle Konstanten sind, von denen c nicht verschwinden soll, so gilt auch hier der

Satz: Ist $f(x,y)$ eine rationale Funktion von x und y, wo $y = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$ ist, so lässt sich das irrationale Differential

$$f(x, y)\,dx$$

durch Einführung einer neuen Veränderlichen stets auf ein rationales Differential zurückführen und daher nach den Methoden des vorigen Abschnitts integrieren.

Wie eine kurze Ueberlegung ergiebt, kann die Funktion $f(x,y)$ stets auf die Form gebracht werden

$$f(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}) = F(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}, \quad (1)$$

wo $F(x), \varphi(x), \psi(x)$ rationale Funktionen der Veränderlichen x sind.

Der erste Teil rechts kann als rationale Funktion von x nach den Methoden des vorigen Abschnitts unmittelbar integriert werden.

Entwickelt man alsdann im zweiten Teil der Gleichung (1) den Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ nach der Methode der gebrochenen rationalen Funktionen, so erkennt man, dass derselbe nur Glieder von der Form enthalten kann

$$\frac{x^n}{y} = \frac{x^n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \text{ oder}$$
$$\frac{1}{(x-k)^m\, y} = \frac{1}{(x-k)^m \sqrt{a + 2bx + cx^2}}. \quad (2)$$

Die Integrale dieser Funktionen aber können mit Hilfe zweier Reduktionsformeln auf das Integral $\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$ zurückgeführt werden. Um dies zu zeigen, leiten wir den Ausdruck $x^{n-1} y$ nach x ab

$$\frac{d\left(x^{n-1} y\right)}{dx} = (n-1)\, x^{n-2} y\, dx + \frac{x^{n-1}}{y}(b + cx)\, dx,$$

dann ergiebt sich hieraus nach kurzer Umformung und Integration die Reduktionsformel:

$$\int \frac{x^n}{y} dx = \frac{1}{cn} x^{n-1} y - \frac{b}{cn}(2n-1) \int \frac{x^{n-1}}{y} dx$$
$$- \frac{a}{cn}(n-1) \int \frac{x^{n-2}}{y} dx, \qquad (3)$$

welche für jeden ganzzahligen Wert von $n \gtrless 0$ Gültigkeit hat.

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel für $n = n,\ n-1,\ n-2, \cdots, 3, 2, 1$ gelangt man schliesslich zu dem Integral

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}. \qquad (4)$$

Die von den Partialbrüchen aus $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ herrührenden Glieder der Funktion (1) sind von der Form

$$\int \frac{dx}{(x-k)^m y},$$

wo $m = m,\ m-1, \ldots, 3, 2, 1$ sein kann. Setzen wir hierin $x - k = z$, $x = k + z$, so wird $dx = dz$ und $a + 2bx + cx^2$

$$= a + 2b(k + z) + c(k + z)^2$$
$$= a + 2bk + ck^2 + 2(b + k)z + cz^2$$
$$= a' + 2b'z + cz^2,$$

somit geht das obige Integral über in

$$\int \frac{dx}{(x-k)^m y} = \int \frac{dz}{z^m \sqrt{a' + 2b'z + cz^2}},$$

d. h. in ein solches von der Form $\int \frac{dx}{x^m y}$.

Da die Formel (3) für alle möglichen Werte von n, also auch für negative, gültig sein muss, so können wir $n-2=-m$ setzen. Alsdann ergiebt sich nach einiger Umformung die weitere Reduktionsformel

$$\int \frac{dx}{x^m y} = -\frac{1}{a(m-1)}\left\{\frac{y}{x^{m-1}} + b(2m-3)\int \frac{dx}{x^{m-1}y} + c(m-2)\int \frac{dx}{x^{m-2}y}\right\}, \quad (5)$$

die für alle Werte von $m \gtrless 2$ brauchbar ist, für $m=1$ dagegen kein Resultat liefert. Für $m=2$ lässt sich das Integral $\int \frac{dx}{x^2 y}$ überführen in $\int \frac{dx}{xy}$. Das letztere geht mit der Substitution

$$\frac{1}{x} = z, \; -\frac{dx}{x^2} = dz$$

über in

$$\int \frac{dx}{xy} = \int \frac{\frac{1}{x^2}\,dx}{\sqrt{\frac{a}{x^2} + \frac{2b}{x} + c}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + 2bz + c}}, \text{ d. h.}$$

in ein solches von der Form (4) $\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$.

Wir gelangen deshalb zu dem

Satz: Die in dem Integral der Funktion (1)

$$\int f(x, y)\,dx = \int F(x)\,dx + \int \frac{\varphi(x)\,dx}{\psi(x)\,y}$$

nach Zerlegung der Funktion $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in Partialbrüche auftretenden Einzelintegrale von der Form

$$\int \frac{x^n\,dx}{y} \text{ oder } \int \frac{dx}{(x-k)^m y}$$

lassen sich sämtlich auf das Integral

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} \tag{4}$$

zurückführen.

2. Um dieses Integral mit möglichster Vermeidung von imaginären Funktionen zu ermitteln, unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Ist $c > 1$, also positiv, so setze man

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = t + x\sqrt{c},$$

dann ergiebt sich $t^2 + 2tx\sqrt{c} = a + 2bx$

$$x = \frac{t^2 - a}{2(b - t\sqrt{c})}, \; dx = \frac{t + x\sqrt{c}}{b - t\sqrt{c}}\,dt \text{ und}$$

$$\int \frac{dx}{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{b + cx - \sqrt{a+2bx+cx^2}\right\}. \tag{5}$$

Satz: Ist der Koeffizient c unter dem Quadratwurzelzeichen positiv, so lässt sich das Integral (4) auf einen Logarithmus zurückführen.

2. Ist $c < 1$, also negativ, so ist

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{\sqrt{-c}\,dx}{\sqrt{(b^2 - ac) - (b + cx)^2}}.$$

Setzt man hierin

$$t = \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}}, \; dx = \frac{1}{c}\sqrt{b^2 - ac}\,dt,$$

so geht das Integral über in

$$\int \frac{dx}{y} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc} \sin \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}. \quad (6)$$

Satz: Ist der Koeffizient c des Glieds cx^2 unter dem Quadratwurzelzeichen negativ, so lässt sich das Integral auf einen Arcussinus zurückführen.

Die Formel (6) ist unbrauchbar, wenn $b^2 - ac = 0$ ist, was nur eintreten kann, wenn neben c auch a negativ wird. In diesem Fall ist

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = \sqrt{a} + x\sqrt{c} \text{ und}$$

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{x\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, l \left\{ x\sqrt{c} + \sqrt{a} \right\}. \quad (7)$$

Ist $c < 0$ und $a < 0$, so kann auch $b^2 - ac < 0$ werden. Dann ist $\sqrt{b^2 - ac}$ und damit auch das Integral (6) imaginär.

3. Die Gleichung

$$y = \sqrt{a + 2bx + cx^2} \text{ od. } cx^2 - y^2 + 2bx + a = 0 \quad (8)$$

stellt a) für $c > 0$ eine symmetrisch zur x-Axe liegende Hyperbel mit den Asymptoten

$$y = + x\sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{c}} \text{ dar;}$$

b) für $c < 0$ und $b^2 - ac \gtrless 0$ eine Ellipse, bezw. einen imaginären Kegelschnitt dar. Im ersten Fall ist bei veränderlichem t durch

$$y = x\sqrt{c} + t$$

ein Parallelstrahlenbüschel ausgedrückt, dessen Strahlen parallel zu einer Asymptote der betreffenden Hyperbel sind und diese daher nur noch in einem im Endlichen liegenden Punkt schneiden können. Die Koordinaten dieses Punktes wie auch das Differential $\frac{dx}{y}$ lassen sich

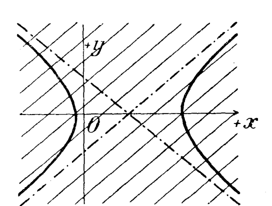


Fig. 2.

deshalb rational durch den Parameter t ausdrücken:

$$x = \frac{a - t^2}{2(t\sqrt{c} - b)}, y = x\sqrt{c} + t, dx = -\frac{a\sqrt{c} - bt}{(t\sqrt{c} - b)^2} dt.$$

Im zweiten Fall $c < 0$ und $b^2 - ac > 0$ stellt die Gleichung (8) eine zur x-Axe symmetrisch liegende Ellipse dar, welche dieselbe in den Punkten $y = 0$, $x = \alpha$ und $y = 0$, $x = \beta$ schneiden möge. Dann ist deren Gleichung auch angegeben durch

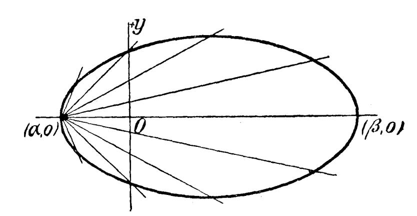


Fig. 3.

$$y^2 = c(x - \alpha)(x - \beta).$$

Bei veränderlichem t stellt alsdann

$$y = t(x - \alpha)$$

ein Strahlenbüschel durch den einen jener Punkte $(\alpha, 0)$ dar, dessen Strahlen die Ellipse je nur noch in einem Punkte treffen, dessen Koordinaten sich mit dem Diffe-

rential $\frac{dx}{y}$ rational durch den Parameter t ausdrücken lassen. Man erhält

$$x = \frac{t^2 \alpha - c\beta}{t^2 - c}, \; y = \frac{t c(\alpha - \beta)}{t^2 - c}, \; dx = \frac{2c(\alpha - \beta) t dt}{(t^2 - c)^2}.$$

§ 15. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Die im folgenden unter dem Wurzelzeichen auftretenden konstanten Koeffizienten a, b, c mögen positiv reell angenommen werden, dann ergeben sich die Integrale:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l \left\{ b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2} \right\}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{cx - b}{\sqrt{b^2 + ac}}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} l \left\{ bx + \sqrt{b}\sqrt{a + bx^2} \right\}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x \sqrt{\frac{b}{a}}$.

5. Bezeichnet man wie im vorigen Paragraphen mit y die Quadratwurzel $y = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so lässt sich jedes Integral von der folgenden Form auf die Gestalt bringen

$$\int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{y} dx$$
$$= (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_0) y$$
$$+ \beta \int \frac{dx}{y}$$

wo $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha; \beta$ Zahlenkoeffizienten bedeuten. Wie die Ermittlung der letzteren geschieht, mögen die folgenden Beispiele zeigen.

6. Es sei $\int \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{y} dx$

$$= (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) y + \beta \int \frac{dx}{y}.$$

Differentiiert man diese Gleichung beiderseits nach x, so folgt

$$\frac{1}{y} (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = (2 \alpha_2 x + a_1) y$$
$$+ \frac{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}{y} (b + c x) + \frac{\beta}{y}$$

und hieraus, nachdem der Nenner y weggeschafft worden ist, durch einfache Koeffizientenvergleichung

$$\begin{aligned} a_3 &= 3 \alpha_2 c \\ a_2 &= 2 \alpha_1 c + 5 \alpha_2 b \\ a_1 &= 1 \alpha_0 c + 3 \alpha_1 b + 2 \alpha_2 a \\ a_0 &= \phantom{1 \alpha_0 c + {}} 1 \alpha_0 b + 1 \alpha_1 a + \beta, \end{aligned}$$

woraus sich die Grössen α_2, α_1, α_0, β nacheinander berechnen lassen.

Auf diese Weise lassen sich die Integrale $\int$ 7, 11, 12 ermitteln.

7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3 + 2x - 5x^2}} = \alpha \sqrt{3 + 2x - 5x^2} + \beta \int \frac{dx}{y}.$

Durch beiderseitige Differentiation und nach Weglassung des Nenners erhält man zur Bestimmung vom α und β

$$x = \alpha (1 - 5x) + \beta,$$

woraus folgt

$$1 = -5 \alpha, 0 = \alpha + \beta \text{ oder } \alpha = -\frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{5},$$

somit erhält das Integral den Wert

$$\int \frac{x\,dx}{y} = -\frac{1}{5} \sqrt{3 + 2x - 5x^2} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \text{ arc sin } \frac{5x - 1}{4}$$

8. $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,l\left\{x + \sqrt{a^2+x^2}\right\}$$

9. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

10. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ab+b^2+2ax-x^2}} = -\frac{1}{2}(x+3a)\,y + \frac{1}{2}(3a^2+2ab+b^2)\int\frac{dx}{y}$$

11. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} - \frac{b}{c\sqrt{c}}\,l\left\{b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right\}$$

12. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx-cx^2} + \frac{b}{c\sqrt{c}}\arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}$$

13. Integrale von der Form

$$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

werden durch die Substitution $x-k=\frac{1}{z}$, $dx=-\frac{dz}{z^2}$ auf solche der vorigen Art zurückgeführt, wie die folgenden Beispiele zeigen.

14.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-3x^2}} = -\int\frac{dz}{\sqrt{2z-3}} = -\sqrt{2z-3} = -\sqrt{\frac{2-3x}{x}}$$

15.
$$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-2x+3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,l\,\frac{2x+\sqrt{6}\sqrt{x^2-2x+3}}{x-3}$$

16.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} l \frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}$$

17.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{bx-a}{x\sqrt{b^2+ac}}$$

18. Durch dieselbe Substitution lässt sich auch das Integral überführen in das folgende

$$\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a+2bx+cx^2}} = \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2}}.$$

§ 16. Höhere transcendente Integrale und Funktionen.

In den vorhergehenden Paragraphen ist die Integration der algebraischen Differentiale f (x) dx für folgende drei Fälle behandelt worden. Es war

1. $f(x) = \varphi(x)$ gleich einer rationalen Funktion von x,

2. $f(x) = \varphi\left(x, \sqrt[n]{\frac{a+bx}{c+dx}}\right)$

3. $f(x) = \varphi(x, \sqrt{a+2bx+cx^2})$

Die Integrale dieser Funktionen sind, wie wir gesehen haben, durch algebraische, logarithmische und cyklometrische Funktionen darstellbar. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn f (x) entweder die Quadratwurzel aus einer den zweiten Grad übersteigenden ganzen Funktion von x oder höhere Wurzeln aus nicht linearen Funktionen enthält. Funktionen dieser Art werden als höhere transcendente Funktionen bezeichnet.

Erklärung. Enthält die Funktion f (x) die Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion dritten oder vierten Grades von x, so wird

$$\int f\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}\right) dx$$

nach Legendre als elliptisches Integral oder als eine elliptische Funktion bezeichnet. Ein solches Integral ist alsdann ausser durch algebraische, logarithmische und cyklometrische Funktionen noch durch elliptische Funktionen darstellbar.

Treten noch höhere Funktionen unter dem Wurzelzeichen auf, oder sind in f höhere Wurzeln aus nicht linearen Funktionen von x enthalten, so gelangt man zu den sogenannten hyperelliptischen Funktionen, die wie auch die elliptischen Funktionen aus dem Kreis unserer Betrachtungen weggelassen werden soilen, da ihr Studium den Rahmen der Elementarmathematik überschreiten würde.

IV. Abschnitt.

Integration transcendenter Differentiale.

§ 17. Transcendente Differentiale.

Erklärung. Ein Differential $f(x)\,dx$ heisst transcendent, wenn $f(x)$ einzelne oder mehrere der transcendenten Funktionen a^x, e^x; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$; $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccot} x$ enthält.

Bei der Integration transcendenter Differentiale kommen hauptsächlich folgende Methoden in Betracht:

α. Integration durch Substitution einer neuen Veränderlichen.

β. Reduktion der Integrale auf einfachere derselben Art mit Hilfe der teilweisen Integration nach der Formel

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx.$$

γ. Integration durch Rationalisierung des gegebenen transcendenten Differentials. Siehe § 20.

∂. Integration durch Reihenentwicklung.

§ 18. Integration transcendenter Differentiale durch Substitution.

a) Ist f eine algebraische (rationale) Funktion der elementaren transcendenten Funktionen

$$e^x, \sin\varphi, \cos\varphi, \operatorname{tg}\varphi, \cot\varphi, \operatorname{arc}\sin x, \operatorname{arc}\cos x, \operatorname{arc}\operatorname{tg} x, \operatorname{arc}\cot x,$$

so lassen sich die folgenden transcendenten Integrale durch die beigefügten Substitutionen direkt in Integrale algebraischer (rationaler) Funktionen überführen.

1. $$\int f(e^{kx})\, e^{kx} dx = \frac{1}{k}\int f(z)\, dz$$
$$z = e^{kx},\ dz = e^{kx} dx.$$

2. $$\int f(lx) \frac{dx}{x} = \int f(z)\, dz$$
$$z = l\,x,\ dz = \frac{dx}{x}.$$

3. $$\int f(\sin\varphi) \cos\varphi\, d\varphi = \int f(z)\, dz$$
$$z = \sin\varphi,\ dz = \cos\varphi\, d\varphi.$$

4. $$\int f(\cos\varphi) \sin\varphi\, d\varphi = -\int f(z)\, dz$$
$$z = \cos\varphi,\ dz = -\sin\varphi\, d\varphi.$$

5. $$\int f(\operatorname{tg}\varphi) \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int f(z)\, dz$$
$$z = \operatorname{tg}\varphi,\ dz = d\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

6. $\int f(\cot\varphi)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\int f(z)\,dz$

$$z = \cot\varphi\,,\ dz = d\cot\varphi = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

7. $\int f(\operatorname{arc}\sin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(z)\,dx$

$$z = \operatorname{arc}\sin x\,,\ dz = d\operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. $\int f(\operatorname{arc}\cos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int f(z)\,dz$

$$z = \operatorname{arc}\cos x\,,\ dz = d\operatorname{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. $\int f(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(z)\,dz$

$$z = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\,,\ dz = d\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

10. $\int f(\operatorname{arc}\cot x)\frac{dx}{1+x^2} = -\int f(z)\,dz$

$$z = \operatorname{arc}\cot x,\ dz = d\operatorname{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

b) Wie die folgenden Integrale transcendenter Differentiale in solche algebraischer Differentiale übergeführt werden können, zeigen die beigefügten Substitutionen:

11. $\int f(e^{kx})\,dx = \frac{1}{k}\int f(z)\frac{dx}{z}$

$$z = e^{kx},\ lz = kx\,,\ \frac{dz}{z} = k\,dx\,.$$

12. $\int f(\sin\varphi)\,d\varphi = \int f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$$z = \sin\varphi,\ \varphi = \operatorname{arc}\sin z,\ d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

13. $\int f(\cos\varphi)\,d\varphi = -\int f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$$z = \cos\varphi,\ \varphi = \operatorname{arc}\cos z,\ d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1-z^2}}.$$

14. $\int f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi = \int f(z)\frac{dz}{1+z^2}$

$$z = \operatorname{tg}\varphi,\ \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg} z,\ d\varphi = \frac{dz}{1+z^2}.$$

15. $\int f(\cot\varphi)\,d\varphi = -\int f(z)\frac{dz}{1+z^2}$

$$z = \cot\varphi,\ \varphi = \operatorname{arc}\cot z,\ d\varphi = -\frac{dz}{1+z^2}.$$

Setzt man $z = \sin\varphi$, so folgt hieraus

$$\cos\varphi = \sqrt{1-z^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},\ \cot\varphi = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z},\ d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

daher ist allgemein

16. $\int f(\sin\varphi, \cos\varphi, \operatorname{tg}\varphi, \cot\varphi)\,d\varphi$

$$= \int f\left(z, \sqrt{1-z^2}, \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Es gilt somit der

Satz: Jedes transcendente Differential, welches die trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\cot\varphi$ enthält, lässt sich durch Substitution in ein algebraisches Differential überführen.

Beispiele:

1. $\int (e^{ax} + \sqrt{e^x})\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + 2\sqrt{e^x}.$

2. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = 2\,l(e^x-1) - x.$

3. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x.$

4. $\int \frac{e^x\, dx}{(e^x - 1)^3} = -\frac{1}{2(e^x - 1)^2}.$

5. $\int (e^x + e^{-x})\, dx = e^x - e^{-x}.$

6. $\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\cot \varphi.$

7. $\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$

8. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -l(\cos x).$

9. $\int \cot x\, dx = l(\sin x).$

10. $\int \operatorname{tg} k x\, dx = -\frac{1}{k}\, l \cos k x.$

11. $\int \cos^2 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x.$

12. $\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 x) \cos x.$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x.$

14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

§ 19. Integration transcendenter Differentiale durch allmähliche Reduktion.

a) Integrale von der Form

$$\int x^m e^{kx}\, dx$$

werden durch die teilweise Integration nach der Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

gelöst. Setzt man

$$u = x^m,\ dv = e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\,d\,e^{kx},\ v = \frac{e^{kx}}{k},$$

so folgt hieraus, wie auch im § 7 gezeigt worden ist, die Reduktionsformel

$$\int x^m\,e^{kx}\,dx = \frac{x^m\,e^{kx}}{k} - \frac{m}{x}\int x^{m-1}\,e^{kx}\,dx. \qquad (1)$$

Beispiele:

1. $\int x\,e^x\,dx = e^x\,(x - 1).$
2. $\int x^2\,e^x\,dx = e^x\,(x^2 - 2\,x + 2).$
3. $\int x^3\,e^x\,dx = e^x\,(x^3 - 3\,x^2 + 6\,x - 6).$

::::

b) Integrale von der Form $\int f\,(lx)\,dx$ werden auf die vorige Art zurückgeführt, indem man setzt

$$z = lx,\ x = e^z,\ dx = e^z\,dz$$

$$\int f\,(lx)\,dx = \int f\,(z)\,e^z\,dz. \qquad (2)$$

Beispielsweise ist

1. $\int lx\,dx = \int z\,e^z\,dz = e^z\,(z - 1) = x\,(lx - 1).$
2. $\int (lx)^2\,dx = \int z^2\,e^z\,dz = e^z\,(z^2 - 2z + 2)$ $= x\left\{(lx)^2 - 2\,lx + 2\right\}.$
3. $\int \left\{lx + 1\right\}dx = x\,lx.$

c) Wie schon in § 8 weiter ausgeführt worden ist, lassen sich auch die folgenden Integrale durch allmähliche Reduktion ermitteln:

$$\int \sin^m\varphi\,d\varphi,\ \int \cos^m\varphi\,d\varphi,\ \int \sin^m\varphi\cos^n\varphi\,d\varphi. \qquad (3)$$

$$\int x^k\sin x\,dx,\ \int x^k\cos x\,dx.$$

d) Auch die folgenden Integrale können mit Hilfe der teilweisen Integration ermittelt werden:

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx,\ J_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Man erhält nach dieser Methode

$$J_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

$$J_2 = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx,$$

woraus sich ergiebt

$$J_1 = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C$$

$$J_2 = e^{ax} \frac{-b \cos bx + a \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

e) Integrale, welche Kreisfunktionen enthalten, wie zum Beispiel

$$\int f(\operatorname{arc} \sin x)\, dx$$

werden durch die Substitution

$$z = \operatorname{arc} \sin x,\ x = \sin z,\ dx = \cos z\, dz$$

zurückgeführt auf

$$\int f(\operatorname{arc} \sin x)\, dx = \int f(z) \cos z\, dz,$$

die nach c oder § 8 zu lösen sind.

Beispiele hierzu finden sich in § 7 Nro. 5—9.

f) Der Integrallogarithmus $\int \frac{dx}{lx}$ kann nur durch Reihenentwicklung näherungsweise ermittelt werden.

§ 20. Integration transcendenter Differentiale durch Rationalisierung.

Die Methode der Rationalisierung eines Differentials $f(x)\, dx$ ist besonders anwendbar, wenn $f(x)$ eine rationale Funktion der elementaren trigonometrischen Funktionen $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$, $\cot \varphi$ ist.

Setzt man in einem Kreis vom Radius 1 die Koordinaten des Punktes P

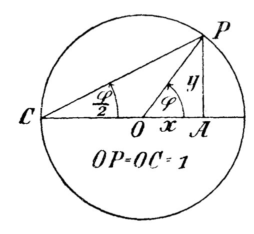


Fig. 4.

$$OA = x, AP = y,$$

so ist $\cos\varphi = x, \sin\varphi = y, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \cot\varphi = \frac{x}{y}$. (1)

Zieht man nun CP, so ist $\sphericalangle OCP = \frac{\varphi}{2}$ und wenn man $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{1+x} = \lambda$ oder $\varphi = 2 \operatorname{arc}\operatorname{tg}\lambda$ setzt, so folgt:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}, \cot\varphi = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}, \\ d\varphi &= \frac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

womit angezeigt ist, dass durch die Substitution (1) jede rationale Funktion der elementaren transcendenten Funktionen $\sin\varphi, \cos\varphi, \operatorname{tg}\varphi, \cot\varphi$ als rationale Funktion des Parameters λ dargestellt werden kann. Somit gilt der

Satz: Jedes transcendente Differential $f(\varphi)d\varphi$, welches nur trigonometrische Funktionen der Veränderlichen φ rational enthält, lässt sich als rationales Differential darstellen.

Beispiele:

1.
$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{d\lambda}{\lambda} = l\lambda = l\left(tg\frac{\varphi}{2}\right).$$

2.
$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int \frac{2\,d\lambda}{1-\lambda^2} = \int \left\{\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right\} d\lambda$$
$$= l\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = l\frac{1+tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg\frac{\varphi}{2}} = l\,tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

3.
$$\int \cot\varphi\, d\varphi = \int \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\,\frac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2} = l\lambda = l\,tg\frac{\varphi}{2} = l\sin\varphi.$$

4.
$$\int tg\,\varphi\, d\varphi = \int \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\,\frac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2} = \int \left\{\frac{1}{1-\lambda^2} + \frac{1}{1+\lambda^2}\right\} d\lambda^2$$
$$= l\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} = -l\cos\varphi.$$

V. Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

§ 21. Das bestimmte Integral.

Bezeichnet man mit $F(x)$ eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, so heisst

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$ mit der Konstanten C. Diese lässt sich bestimmen, indem man der Veränderlichen x einen Wert beilegt, durch welchen das Integral verschwindet. Ist a ein solcher, also $\int f(a)\,da = 0$, so ist auch $F(a) + C = 0$ und $C = -F(a)$.

Wir erhalten alsdann das **bestimmte** Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a),$$

wo x die **obere** und a die **untere** Grenze heisst.

Satz: Das bestimmte Integral $\int_a^a f(x)\,dx$ zwischen den Grenzen a und b wird erhalten, indem man ohne Rücksicht auf die Konstante das unbestimmte Integral ermittelt und die Differenz der Werte bildet, welche dasselbe bezw. für $x = a$ und $x = b$ annimmt.

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

Beispiele:

1.

$$\int_0^a (a^2 + ax + x^2)\,dx = a^2 x + \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^2 \Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$= a^3 + \frac{1}{2} a^3 + \frac{1}{3} a^3 = \frac{11}{6} a^3.$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

3.

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{1}{a} \left\{ \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 \right\} = \frac{\pi}{4a}.$$

§ 22. Das bestimmte Integral als eine Summe von unendlich kleinen Grössen.

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, welche innerhalb des Gebietes $x = x$ bis $x = a$ eindeutig, endlich und

stetig ist, dann zeigt auch die durch $y = f(x)$ dargestellte ebene Kurve zwischen den Punkten P und Q mit den Abscissen x und a einen stetigen Verlauf. Der Inhalt der Fläche PABQ, der von den Ordinaten $y = f(x), b = f(a)$, der Abscissenaxe und dem Kurvenbogen PQ begrenzt ist, sei U. Teilt man die Strecke $AB = a - x$ in n gleiche Teile $\triangle x$ ein und errichtet in den Teilpunkten Lote, welche den Bogen PQ in den Punkten $P_1, P_2 \ldots$ treffen mögen, dann ist nach § 69 der Differentialrechnung der Flächeninhalt U näherungsweise angegeben durch

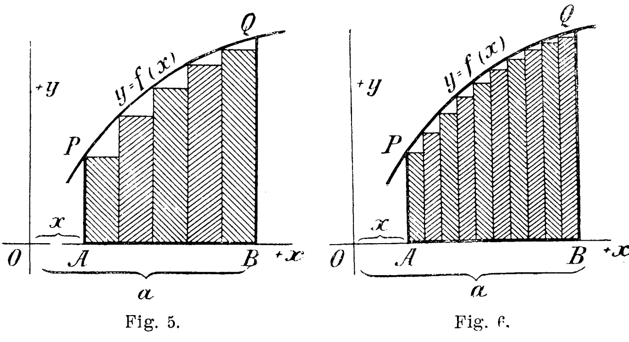


Fig. 5. Fig. 6.

$$Un = \triangle x \left\{ f(x) + f(x + \triangle x) + f(x + 2 \triangle x) + \ldots + f(x + (n-1) \triangle x) \right\}$$

oder

$$Un' = \triangle x \left\{ f(x + \triangle x) + f(x + 2 \triangle x) + \ldots + f(x + n \triangle x) \right\}, \tag{1}$$

wo Un bezw. Un' eine Summe von Rechtecken darstellt, die kleiner, bezw. grösser als U ist:

$$Un < U < Un'. \tag{2}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) erhält man

$$Un' - Un = \triangle x \left\{ f(x + n \triangle x) - f(x) \right\}. \qquad (3)$$

Lässt man hierin n immer grösser und damit $\triangle x$ immer kleiner werden, so nähert sich die rechte Seite dieser Gleichung mehr und mehr der Grenze 0, d. h. es ist

$$\lim (Un' - Un)_{n=\infty} = 0 \text{ oder}$$

$$\lim Un = \lim Un'. \qquad (4)$$

Zufolge dieser Gleichung kann aber die Ungleichung (2) nur bestehen, wenn

$$\lim Un = U = \lim Un' \qquad (5)$$

ist. Es ergiebt sich somit der

Satz: Jede der beiden Summen (1) nähert sich bei unendlich wachsendem n dem Grenzwert U, der geometrisch den Inhalt der Fläche PABQ darstellt.

Wie die Gleichung (4) zeigt, kann dieser Inhalt als eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Rechtecken angesehen werden.

Entwickelt man in dem Ausdruck für Un jede der Funktionen $f(x + i \triangle x)$ nach Potenzen von $i \triangle x$ und fasst die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\triangle x$ zusammen, so lässt sich lim Un, wie in § 69 der Differentialrechnung gezeigt worden ist, durch die Potenzreihe darstellen

$$\lim Un = (a-x) f(x) + \frac{1}{2!} (a-x)^2 f'(x) + \frac{1}{3!} (a-x)^3 f''(x) + \ldots, \qquad (6)$$

welche unter den gegebenen Voraussetzungen konvergent ist und den Grenzwert U besitzt. Es gilt somit der

Satz: Der Inhalt U der Fläche PABQ ist ausgedrückt durch die konvergente Potenzreihe.

$$U = (a - x) f(x) + \frac{1}{2!}(a - x)^2 f'(x) + \frac{1}{3!}(a - x)^3 f''(x) + \dots$$

Ist nun $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ das unbestimmte Integral des Differentials $f(x)\,dx$, so folgt hieraus durch Ableitung

$$f(x) = F'(x),\; f'(x) = F''(x),\; f''(x) = F'''(x), \dots \quad (7)$$

Entwickelt man alsdann den Ausdruck $F(x) + C$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz nach Potenzen von $x + h$, so folgt:

$$F(x + h) + C = F(x) + C + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \dots$$

oder wenn wir $h = a - x$ setzen und die Bedingungen (7) berücksichtigen

$$F(a) = F(x) + (a - x) f(x) + \frac{1}{2!}(a - x)^2 f'(x) + \dots$$

$$\text{oder } F(a) - F(x) = \lim Un = U.$$

Da nun der Annahme gemäss $F(x)$ das unbestimmte Integral des Differentials $f(x)\,dx$ ist, so stellt nach dem vorigen Paragraphen $F(a) - F(x)$ das bestimmte Integral desselben Differentials zwischen den Grenzen a und x dar. Es ist daher

$$U = \lim Un = \int_x^a f(x)\,dx = F(a) - F(x), \quad (8)$$

woraus die Sätze folgen:

Satz: Das bestimmte Integral

$$\int_x^a f(x)\,dx = F(a) - F(x)$$

des Differentials $f(x)\,dx$ stellt geometrisch den Inhalt der Fläche U dar, der von den Ordinaten $y = f(x)$, $b = f(a)$ der Punkte P und Q mit den Abscissen x und a, der Abscissenaxe und dem Bogen PQ der Kurve $y = f(x)$ begrenzt wird.

Satz: Nach Gleichung (6) und (8) lässt sich das bestimmte Integral des Differentials $f(x)\,dx$ auch als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Elementen betrachten, welche in (1) mit Un oder Un′ bezeichnet ist.

Vergleicht man die Gleichungen (6) und (8) miteinander, so gelangt man zu dem weiteren

Satz: Das bestimmte Integral $\int_x^a f(x)\,dx$ des Differentials $f(x)\,dx$ lässt sich in eine konvergente nach Potenzen von $a - x$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten durch Ableitung von $f(x)$ erhalten werden.

$$\int_x^a f(x)\,dx = (a - x)\,f(x) + \frac{1}{2!}\,(a - x^2)\,f'(x) + \frac{1}{3!}\,(a - x)^3\,f'''(x) + \ldots$$

Dieser Satz kann dazu dienen, ein bestimmtes Integral mit endlichen Grenzen nur mit Hilfe der Differentialrechnung zu berechnen.

§ 23. Lehrsätze über das bestimmte Integral.

1. Aus Formel (1) des § 21 ergiebt sich durch Vertauschung der Grenzen a und b unmittelbar der

Satz: Ein bestimmtes Integral geht in seinen



entgegengesetzten Wert über, wenn man die Grenzen miteinander vertauscht. Es ist:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

2. Zugleich folgt der weitere

Satz: Ein bestimmtes Integral wird stets gleich Null, sobald die Grenzen einander gleich werden:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \qquad (2)$$

3. Nach § **21** ist der Wert des bestimmten Integrals zwischen den Grenzen a und b

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

Da nun jederzeit in identischer Weise die Gleichung erfüllt ist:

$$F(a) - F(b) = F(a) - F(c) + F(c) - F(b),$$

so folgt auch

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Satz: Anstatt die Integration von der Grenze b bis zur Grenze a direkt auszuführen, kann man auch eine (oder mehrere) Zwischengrenzen c einführen und zunächst von der Grenze b bis zur Grenze c integrieren und nachträglich die Integration von c bis a fortsetzen.

Geometrisch bedeutet die Formel (3), dass man den Flächeninhalt PABQ auch als Summe der Flächenteile PACR und RCBQ betrachten kann; denn es ist

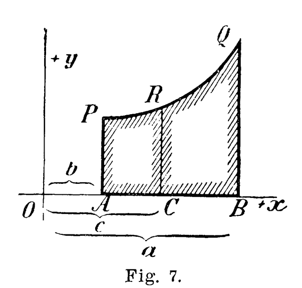


Fig. 7.

Fläche $PACR = \int_b^c f(x)\,dx$, Fläche $RCBQ = \int_c^a f(x)\,dx$, woraus man durch Addition erhält:

$$PABQ = PACR + RCBQ \text{ oder}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx.$$

§ 24. Integration bis $x=\infty$ oder bis und über eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

1. Ist die Funktion $f(x)$ eindeutig und stetig für alle Werte von $x \geqq b$, so kann man auch eine der Grenzen, z. B. die obere, unendlich gross werden lassen.

Erklärung: Nähert sich hierbei das Integral einem bestimmten Grenzwert

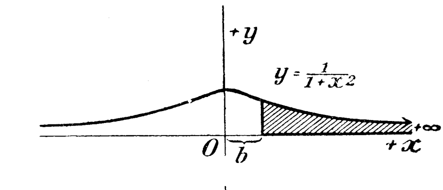
$$\lim_{x=\infty} \int_b^x f(x)\,dx = \lim \Big\{ F(x) - F(b) \Big\}_{x=\infty}$$

so heisst derselbe der Wert, den das Integral für die obere Grenze $x=\infty$ annimmt.

Ein solches Integral kann einen endlichen und bestimmten Wert erhalten oder auch unbestimmt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiele:

1. $$\int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} b. \qquad \text{(Fig. 8.)}$$



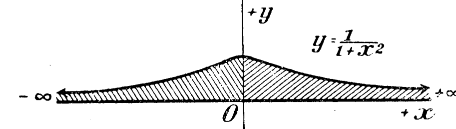


Fig. 8 und Fig. 9.

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \qquad \text{(Fig. 9.)}$$

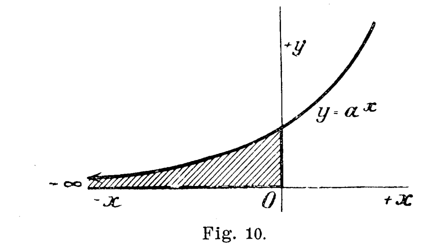


Fig. 10.

3. $$\int_{0}^{-\infty} a^x \, dx = -\frac{1}{la}. \qquad \text{(Fig. 10.)}$$

Hierdurch ist der Flächeninhalt angegeben, der von der Exponentialkurve $y = a^x$, der y-Axe und der negativen x-Axe begrenzt wird.

4. Unbestimmt wird der Wert des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\infty} \cos x \, dx = \sin(x = \infty) - \sin \alpha = \text{unbestimmt.}$$

2. Es kann auch der Fall eintreten, dass $f(x)$ selbst für eine der Grenzen unstetig wird.

Erklärung: Wenn die Funktion $f(x)$ für $x = a$ durch Unendlichkeiten selbst unstetig wird, so bezeichnen wir den Wert des Integrals mit

$$\int_{b}^{x=a} f(x) \, dx = \lim_{x=a} \int_{b}^{x} f(x) dx = \lim \Big\{ F(x) - F(b) \Big\}_{x=a}$$

für den Fall, dass sich hierbei überhaupt ein bestimmter Grenzwert ergiebt. Ist dies nicht der Fall, so darf die Integration nicht bis $x = a$ ausgedehnt werden.

3. Erklärung: Wird die Funktion $f(x)$ für einen Wert $x = c$ unendlich, der zwischen den Grenzen des Integrals b und a liegt $(b < c < a)$, so versteht man unter dem letzteren den Grenzwert, nach welchem die Summe

$$\int_{b}^{a} f(x) \, dx = \lim_{x=c} \int_{b}^{x} f(x) \, dx + \lim_{x=c} \int_{x}^{a} f(x) \, dx$$

konvergiert.

Ein solches Integral kann einen endlichen und bestimmten Wert haben; es kann aber auch unendlich oder unbestimmt werden.

Beispiel:

Die binomische Hyperbel 5. Ordnung, deren Gleichung

$$y^3 (x-1)^2 - 1 = 0 \text{ oder } y = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

ist, hat in $x = 1$ einen unendlich fernen Punkt. Der

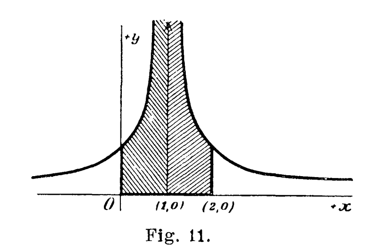


Fig. 11.

Inhalt des schraffierten Flächenstücks ist angegeben durch

$$U = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 3 (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 + 3 (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_1^2$$

$$= -3 \sqrt[3]{-1} + 3 \sqrt[3]{1} = 6.$$

§ 25. Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ durch ein unendliches Produkt.

Integriert man unter der Voraussetzung eines positiven n in den Formeln (2) und (3) von § 8 zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so folgt

1. für ein gerades n:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n} \qquad (1)$$

2. für ein ungerades n:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{n}; \qquad (2)$$

Da nun die Funktion $\sin\varphi$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ stets einen positiven echten Bruch darstellt, so gilt für jedes ganzzahlige $k > 0$

$$\sin^k \varphi > \sin^{k+1} \varphi \text{ und } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \varphi \, d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+1} \varphi \, d\varphi. \qquad (3)$$

Setzt man nun hierin und in den Formeln (1) und (2) $k = 2n - 1, k = 2n$, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} &> \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} &> \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \cdot \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

oder nach einiger Umformung

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot$$

Es ist nun aber leicht zu erkennen, dass sich die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen für $n = \infty$ der gleichen Grenze nähern; daher ist

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \right\} \cdot \qquad (5)$$

Satz: Die irrationale Zahl $\frac{\pi}{2}$ lässt sich darstellen durch das unendliche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots \qquad (6)$$

§ 26. Einige weitere bestimmte Integrale.

1. Mit Hilfe der teilweisen Integration erhält man die Rekursionsformel

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{n} x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist nun hierin n eine gerade Zahl, so gelangt man durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel schliesslich zu dem Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

für ein ungerades n schliesslich zu dem folgenden

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, ergeben sich schliesslich die beiden Endformeln

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n(n-2)} x^{n-3} \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5}{n(n-2)\ldots 4} x\right\} + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5.3}{n(n-2)\ldots 4.2} \arcsin x + C.$$

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n(n-2)} x^{n-3} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 5.3.1}\right\} + C.$$

Nimmt man hierin das Integral zwischen den Grenzen 1 und 0, so folgt

a) für ein gerades n:

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(n-1)(n-3\ldots 5.3}{n(n-2)\ldots 4.2} \cdot \frac{\pi}{2}; \qquad (1)$$

b) für ein ungerades n:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 3.1} \qquad (2)$$

2. Nach der Binomialformel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

ist $(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2.4}\varepsilon^4\cos^4\varphi$

$$-\frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\cos^6\varphi\ldots$$

Durch Integration und Benützung der Formel (1) in § 25 für $n = 2, 4, 6, \ldots$ ergiebt sich hieraus das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\,\varepsilon^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\,\varepsilon^6 - \ldots\right\} \qquad (3)$$

das wir bei der Quadratur und Rektifikation der Ellipse und einiger anderer Kurven verwenden können (§ 29, 5).

Ebenso erhält man die weitere Formel

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = \pi\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1}{1.4}\right)^2 3\,\varepsilon^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\,\varepsilon^6 - \ldots\right\}, \qquad (4)$$

die wir ebenfalls später gebrauchen können.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie der Ebene.

§ 27. Quadratur der Kurven in rechtwinkligen Koordinaten.

Erklärung: Wie schon in der Differentialrechnung § 11 und § 69 ausgeführt wurde, versteht man unter der Quadratur einer Kurve in rechtwinkligen Koordidinaten die Berechnung des Flächeninhalts U, der von den Ordinaten zweier Kurvenpunkte P und Q, dem zugehörigen Kurvenbogen und der Abscissenaxe begrenzt wird.

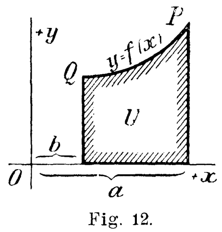


Fig. 12.

Satz: Nach Formel (8) bezw. (6) in § 22 ist der schraffierte Flächeninhalt U (Fig. 12) angegeben durch das bestimmte Integral

$$U = \int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) \qquad (1)$$

bezw. durch die konvergente Potenzreihe

$$U = (a-b)\,f(b) + \frac{1}{2!}(a-b)^2 f'(b) + \frac{1}{3!}(a-b)^3 f''(b) + \ldots \qquad (2)$$

Beispiele:

1. Quadratur der Parabel $y = a x^2$ pag. 36 der Differentialrechnung

$$U = \int_b^x x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3 - b^3),$$

woraus für $b = 0$ folgt: $U = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} x y$.

2. Quadratur der Spitzpunktsparabel $y^2 = p^2 x^3$

$$U = p \int_b^x x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} p x^{\frac{5}{2}} \Big|_b^x = \frac{2}{5} p (x^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}),$$

woraus für $b = 0$ $U = \frac{2}{5} p x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} p x y$ folgt.

3. Erklärung: Sind m und n ganze positive Zahlen, so bezeichnet man die Kurven, welche durch

$$y^n = a x^m$$

dargestellt sind, allgemein als „parabolische“.

Diese Kurven gehen durch den Ursprung. Sind x, y die Koordinaten des Kurvenpunktes P, so ist der schraffierte Flächeninhalt (Fig. 13) angegeben durch

$$U = a^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n} a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n} x y.$$

Da nun Rechteck $DOAP = x y$ ist, so ergiebt sich für den nicht schraffierten Teil desselben der Inhalt

$$DOP = \frac{m}{m+n} x y.$$

Satz: Fällt man von einem Punkt der parabolischen Kurve $y^n = a x^m$ Lote auf die beiden

Axen Ox und Oy, so teilt die Kurve das Rechteck DOAP in zwei Teile DOP und OAP, die sich wie m zu n verhalten DOP:OAP = m:n.

4. Erklärung: Sind m und n ganze Zahlen, so heisst jede Kurve von der Gleichung

$$x^m y^n = a$$

eine „hyperbolische Kurve“.

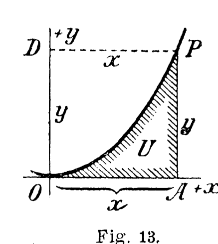


Fig. 13.

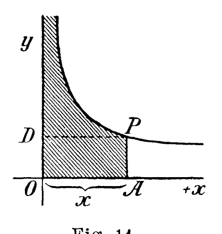


Fig. 14.

Der Inhalt des schraffierten Flächenteils (Fig. 14), der sich ins Unendliche erstreckt, ist angegeben durch

$$U = a^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{n-m} a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} xy.$$

Dieses Resultat führt uns zu dem

Satz: Die schraffierte Fläche, welche sich ins Unendliche erstreckt, steht zu dem Rechteck DOAP = xy in dem konstanten Verhältnis n : n — m.

5. Quadratur der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$U_e = \frac{b}{a} \int_{x_0}^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2} ab \arcsin \frac{x}{a} + \frac{bx}{2a} \sqrt{a^2 - x^2}\right)_{x_0}^x.$$

Beschreibt man um O mit OA = a einen Kreis, so ist

$$U_k = \int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \Bigg|_{x_0}^{x}.$$

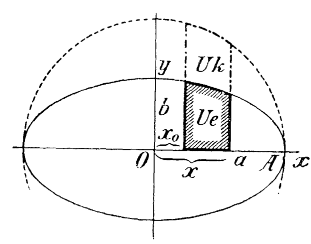


Fig. 15.

Für $x_0 = 0$ und $x = a$ ergiebt sich hieraus als Flächeninhalt des Ellipsenquadranten

$$U = \frac{\pi}{4} a b$$

und somit als Inhalt der ganzen Ellipse

$$U = \pi a b.$$

Ist $b = a$, so geht die Ellipse in einen Kreis über, für welchen wie bekannt

$$U = \pi a^2 \text{ ist.}$$

6. Quadratur der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Es ist $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ und

$$U = \frac{b}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{b}{a} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} l \left(\sqrt{x^2 - a^2} + x \right) \right\}_{x_0}^{x}.$$

Für $x_0 = a$ folgt

$$U = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \, l \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right\}.$$

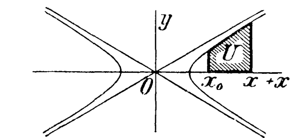


Fig. 16.

7. Die Exponentialkurve (Fig. 17) $y = a^x$ hat den Flächeninhalt

$$U = \int_{x_0}^{x} a^x \, dx = \frac{a^x}{la} \Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{1}{la} (y - y_0).$$

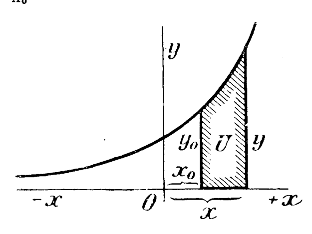


Fig. 17.

8. Für die Sinuslinie (Fig. 18) $y = \sin x$ ist

$$U = \int_{x_0}^{x} \sin x \, dx = -\cos x + \cos x_0.$$

Für $x_0 = 0$ und $x = \pi$ ergiebt sich als Inhalt der ganzen Schleife $U = 1 + 1 = 2$.

9. Für die Kurve dritter Ordnung (Fig. 19), welche die Gleichung besitzt

$$y^2 x - a^2 (a - x) = 0 \text{ oder } y = a \sqrt{\frac{a - x}{x}},$$

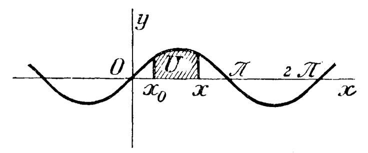


Fig. 18.

ergiebt sich als Flächeninhalt über 0x

$$Ux = \int_0^x a \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx = a \int_0^x \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}}\, dx$$

$$= a^2 \left\{ \arc \sin \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a} \sqrt{ax-x^2} \right\}.$$

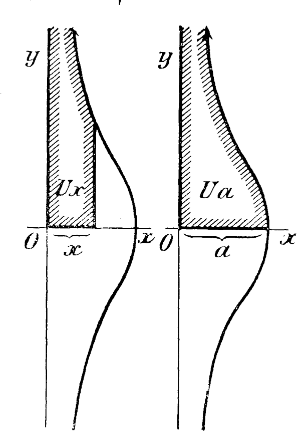


Fig. 19.

(Vergl. § 15) und hieraus für $x = a$ als Inhalt der Fläche zwischen y-Achse, x-Axe und Kurve

$$Ua = \frac{\pi}{2} a^2.$$

Daher hat die ganze Fläche zwischen y-Axe und Kurve den Inhalt

$$J = 2\,U_a = \pi\,a^2.$$

Ein Flächenstreifen parallel zur x-Axe zu den Ordinaten 0 und y hat den Inhalt

$$U'y = \int_0^y x\,dy = \int \frac{a^3}{a^2+y^2}\,dy = a^3 \int_0^y \frac{dy}{a^2+y^2}$$

$$= a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{a}.$$

Für $y = \infty$ folgt hieraus

$$U'\infty = Ua = a^2\,\frac{\pi}{2}.$$

Daher ist sbenso wie oben

$$J = 2\,U'\infty = \pi\,a^2.$$

10. Für die Cycloide, deren Gleichungen in Parameterform sind:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),\ .\ y = a(1 - \cos\varphi),$$

erhalten wir $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$ und als Flächeninhalt

$$Ux = \int_0^x y\,dx = a \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= a^2 \int_0^\varphi \{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\,\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right).$$

Für $\varphi = 2\pi$ folgt hieraus als Inhalt eines ganzen Cycloidenabschnitts

$$U_{2\pi} = \int_0^{2\pi} y\,dx = 3\pi a^2.$$

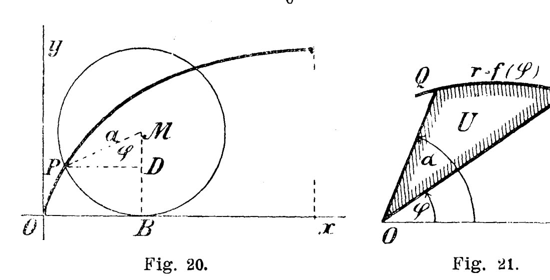


Fig. 20. Fig. 21.

§ 28. Quadratur in Polarkoordinaten.

Erklärung: Unter der Quadratur in Polarkoordinaten versteht man gewöhnlich die Berechnung des Flächeninhalts U, der von dem Kurvenbogen PQ, den Radienrektoren OP und OQ mit den Azimuts φ und α begrenzt ist.

Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten sei

$$r = f(\varphi),$$

wo r den Radiusrektor zum Kurvenpunkt P und φ das zugehörige Azimut bezeichnet. Lässt man alsdann das Azimut φ um die unendlich kleine Grösse $d\varphi$ zunehmen, so unterscheidet sich das zugehörige Flächenelement $OPP' = dU$ von dem elementaren Kreissektor

$$OPD = \frac{r^2}{2}\,d\varphi$$

nur um eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung. Dieser darf deshalb an Stelle des ersteren gesetzt werden. Es ist also

$$dU = \frac{1}{2}\,r^2\,d\varphi, \tag{1}$$

woraus sich durch Integration als Inhalt des Flächenstücks U (Fig. 22) ergiebt

$$U = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\alpha} r^2 \, d\varphi = \int_{\varphi}^{\alpha} f^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (2)$$

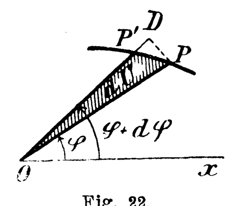


Fig. 22.

Satz: Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten gegeben $r = f(\varphi)$, so ist der Inhalt der Fläche OPQ, welche vom Kurvenbogen PQ, den Radienrektoren OQ und OP (Azimut α bezw. φ) begrenzt wird, angegeben durch das bestimmte Integral (2).

Beispiel.

1. Die Lemniskate hat die Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Es ist somit

$$U = \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha.$$

Für $\alpha = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ $(r = 0)$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{1}{4} J = \frac{1}{4} a^2;$$

somit ist $J = a^2$; daher

Satz: Der Flächeninhalt, der von den beiden Schleifen der Lemniskate eingeschlossen wird,

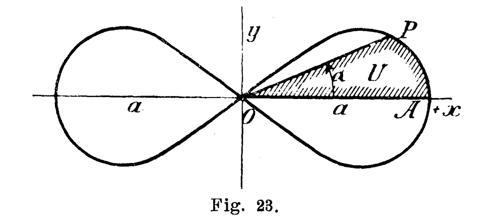


Fig. 23.

ist gleich dem Quadrat über $OA = a$ der halben Symmetrieaxe.

2. Die Kardioïde (Fig. 24) hat die Gleichung

$$r = 2a(1 + \cos\varphi),$$

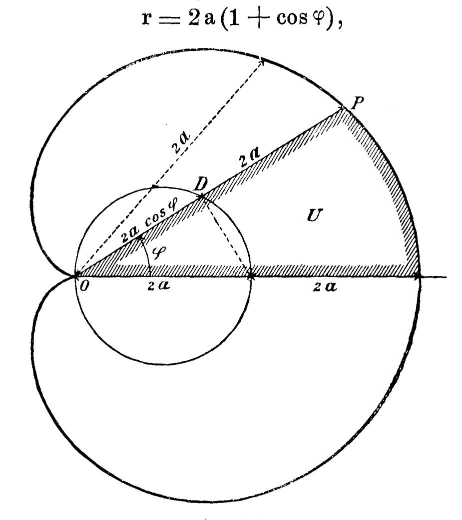


Fig. 24.

daher ist

$$U = \frac{1}{2}\int_0^\varphi 4a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 2a^2\int_0^\varphi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= a^2(3\varphi + 4\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi),$$

somit ist die Hälfte der Gesamtfläche

$$\frac{J}{2} = a^2(3\varphi + 4\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)_0^\pi = 3\pi a^2$$

und die Gesamtfläche selbst

$$J = 6\pi a^2.$$

3. Allgemeinere Kardioïden (Fig. 24 a) ergeben sich, wenn man auf den von O aus gezogenen Strahlen von der Peripherie des Kreises aus eine beliebige Strecke b heraus- oder hereinträgt. Die äussere, bezw. innere Schleife erhält alsdann in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = 2a\cos\varphi + b, \text{ bezw. } r = 2a\cos\varphi - b.$$

Die erste derselben giebt für $r = 2a + b$ und

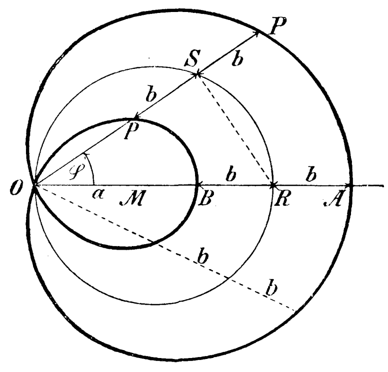


Fig. 24 a.

$r = 0$, $\varphi = 0$ und $\varphi_0 = \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{2a}\right)$, daher ist der halbe

Flächeninhalt der ersten Schleife angegeben durch

$$\frac{U}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_0} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_0} (4\,a^2 \cos^2\varphi + 4\,ab\cos\varphi + b^2)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}(2\,a^2 + b^2)\,\varphi + a^2 \sin\varphi\cos\varphi + 2\,ab\cos\varphi \Big|_0^{\varphi_0}$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + b^2) \arccos\left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{3}{4}\, b\sqrt{4\,a^2 - b^2}.$$

Somit ist

$$U = (2\,a^2 + b^2) \arccos\left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{3}{2}\, b\sqrt{4\,a^2 - b^2}.$$

Ebenso ergiebt sich für den Inhalt der inneren Schleife

$$U' = (2\,a^2 + b^2) \arccos\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{3}{2}\, b\sqrt{4\,a^2 - b^2}.$$

Aus jeder dieser Formeln ergiebt sich für $b = 0$ der Inhalt des Kreises $J = \pi\, a^2$, wie zu erwarten war.

Die beiden obigen Kardioïden stellen zusammen eine Kurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt im Ursprung dar, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten ist:

$$(x^2 + y^2 - 2\,ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

4. Die gewöhnliche Fusspunktskurve des Kreises (Fig. 25) mit Pol in der Peripherie hat die Gleichung

$$r = OD + DP = a\cos\varphi + a \text{ oder}$$

$$r = a\,(1 + \cos\varphi).$$

Daher ergiebt sich als Flächeninhalt der ganzen Kurve

$$U_{2\pi} = \int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2} \pi a^2.$$

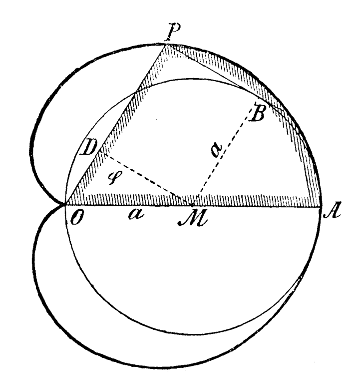


Fig. 25.

Satz: Der Flächeninhalt zwischen Fusspunktskurve und dem gegebenen Kreis vom Radius a ist somit gleich der Hälfte des letzteren $\frac{3}{2}\pi a^2 - \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{2}$.

5. Allgemeinere Fusspunktskurven des Kreises ergeben sich, wenn der Pol O nicht auf die Peripherie selbst zu liegen kommt, sondern in der Entfernung b von derselben angenommen wird.

Liegt O innerhalb Fig. 26, so ist

$r = OP = MB - MD = a - (a - b) \cos \varphi$, oder

$$r = a - (a - b) \cos \varphi.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Kurve ist demnach

$$J = U_{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{a + (a - b)\cos\varphi\right\}^2 d\varphi$$

$$= \pi a^2 + \frac{\pi}{2}(a - b)^2,$$

wobei der zweite Ausdruck den Inhalt der Fläche angiebt, welche zwischen Kreis und Kurve liegt.

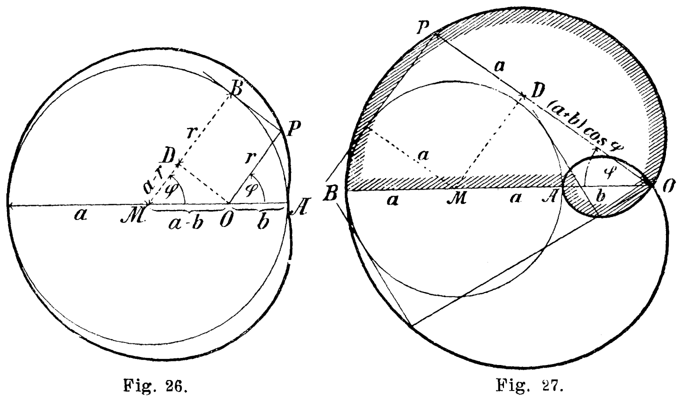


Fig. 26. Fig. 27.

Liegt O ausserhalb des Kreises, so hat die resultierende Fusspunktskurve (Fig. 27) einen Doppelpunkt im Pol und erhält die Gleichung

$$r = a + (a + b)\cos\varphi.$$

Durch Integration von O bis 2π ergiebt sich aus

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{a + (a + b)\cos\varphi\right\}^2 d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{4}(a + b)^2$$

der Inhalt des schraffierten Flächenstücks.

Die ganze Fläche dieser Fusspunktskurve hat somit den Inhalt

$$J = \pi a^2 + \frac{\pi}{2}(a + b)^2;$$

wobei derjenige der Schleife über O A doppelt gerechnet ist. Für b = O reduziert sich der Inhalt der letzteren auf Null und geht J über in den Jnhalt $J = \frac{3}{2}\pi a^2$ der gewöhnlichen Fusspunktskurve, wie es sein soll.

§ 29. Näherungsformeln zur Quadratur der Kurven.

a. Rechtecksformel.

Teilt man wie in § 11 oder § 69 der Differentialrechnung die Strecke $A_0 A_n = a - b$ in n gleiche Teile (Fig. 28) von der Länge $\delta = \frac{a - b}{n}$ und zieht durch die

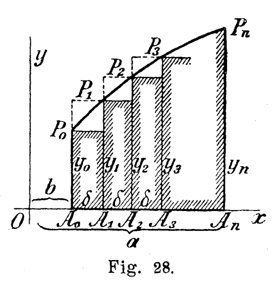


Fig. 28.

Teilpunkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ Parallelen zur y-Axe, welche die Längen

$$y_0 = f(b),\ y_1 = f(b + \delta),\ y_2 = f(b + 2\delta),\ \ldots,\ y_n = f(a)$$

erhalten mögen, so lässt sich der Inhalt der Fläche $P_0 A_0 A_n P_n$ näherungsweise als Summe von n Rechtecken von der Breite δ durch jede der beiden Formeln ausdrücken:

$$U_n = \delta \left\{ y_0 + y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1} \right\} \text{ oder}$$
$$U_n' = \delta \left\{ y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n \right\}, \qquad (1)$$

wo U_n die Summe der kürzeren (schraffierten), U_n' die Summe der längeren Rechtecke darstellt. Ist U der wahre Inhalt der Fläche $P_0 A_0 A_n P_n$, so ist stets

$$U_n < U < U_n'.$$

Wie schon in § 69 der Differentialrechnung gezeigt worden ist, wird der Fehler, den man begeht, wenn man U_n oder U_n' an Stelle von U setzt, immer kleiner, je grösser n wird. Im Grenzfall ist

$$\lim_{n=\infty} U_n = U = \lim_{n=\infty} U_n'$$

b. Trapezformel.

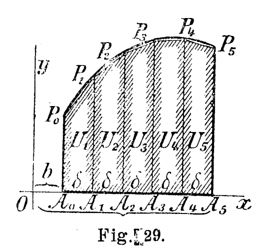


Fig. 29.

Eine grössere Annäherung an U wird bei endlichem n gewöhnlich erzielt, wenn man das arithmetische Mittel von U_n und U_n' bildet und dieses an Stelle von U setzt (Fig. 29)

$$U_n'' = \frac{1}{2}\left(U_n + U_n'\right)$$
$$= \delta \left\{ \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right\}. \quad (2)$$

Geometrisch stellt diese Formel die Summe der n Trapeze

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots,\ U_n$$

von der Höhe δ und den Grundlinien $y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_n$ dar. Die Formel (2) heisst deshalb auch Trepezformel.

c. Die Simpson'sche Regel

gründet sich auf die Verwendung der Parabel

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

zur näherungsweisen Berechnung von U.

Legt man durch die Punkte $P_0\, P_1\, P_2$, welche in diesem Fall die Koordinaten $x_0\, y_0$, $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ haben sollen, obige Parabel, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma \\ y_1 &= \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \\ y_2 &= \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma, \end{aligned} \qquad (3)$$

aus denen sich die Koeffizienten α, β, γ eindeutig berechnen lassen.

Diese Parabel wird sich zwischen den Punkten $P_0\, P_1\, P_2$ im allgemeinen näher an die Kurve schmiegen, als dies für die Rechtecke in a) und die Trapeze in b) der Fall ist.

Näherungsweise kann also zwischen diesen Punkten die Parabel an Stelle der Kurve gesetzt werden. Der Inhalt der beiden ersten Flächenstreifen ist alsdann näherungsweise

$$U_1 + U_2 = \int_{x_0}^{x_2} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, dx = \frac{\alpha}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{\beta}{2}(x_2^2 - x_0^2) + \gamma(x_2 - x_0).$$

Setzt man hierin $x_2 - x_0 = 2\,\delta$ und benützt Gleichungen (3), so geht diese Formel über in

$$U_1 + U_2 = \frac{}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2).$$

Wählt man n gerade $n = 2r$ und bildet ebenso $U_3 + U_4$, $U_5 + U_6$, ..., $U_{n-1} + U_n$ und addiert die erhaltenen Ausdrücke, so ergiebt sich als dritte Näherungsformel

$$U = \frac{\delta}{3}\left\{(y_0 + y_{2r}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2r-2}) \right.$$
$$\left. + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2r-1})\right\}, \quad (4)$$

welche als „Simpon'sche Regel“ bekannt ist.

Beispiel:

Für $\delta = 1$, h_0; h_1; ...; $h_{10} = 4$; 4,3; 4,1; 3,7; 3,1; 2,9; 3,2; 3,6; 4; 3,9; 3,1 ergiebt sich nach den Rechtecksformeln

$$U_n = 36{,}8,\ \ U_n' = 35{,}9$$

und hieraus nach der Trapezformel

$$U_n'' = \frac{1}{2}(U_n + U_n') = 36{,}35.$$

Die Simpson'sche Regel endlich ergiebt

$$U = 36{,}5.$$

§ 30. Rektifikation ebener Kurven in rechtwinkeligen Koordinaten.

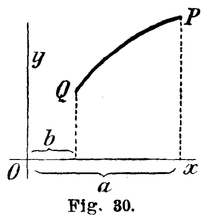


Fig. 30.

Erklärung. Unter der Rektifikation einer Kurve

versteht man die Berechnung der Länge s des Kurvenbogens QP zwischen den Punkten Q und P mit den Abscissen b und a.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen Kurve, so ist nach § 60 der Differentialrechnung das Linienelement angegeben durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (1)$$

Durch Integration folgt hieraus als Länge des Kurvenbogens PQ

$$s = \int_b^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_b^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \qquad (2)$$

Satz: Die Länge des Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abscissen a und b ist angegeben durch das bestimmte Integral (2).

Beispiele:

1. Für die Asteroide (Fig. 31), deren Gleichung

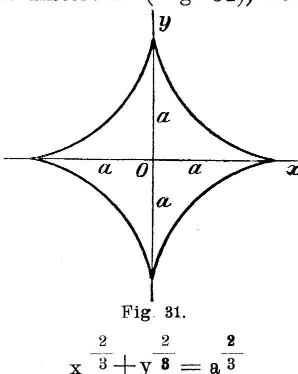


Fig. 31.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist, erhält man

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},\ ds = \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1}\,dx$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx,$$

somit ist

$$s = \int_0^a a^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\,a.$$

Ganzer Umfang $= 6\,a.$

2. Die Kurve (Fig. 32) hat die Gleichung

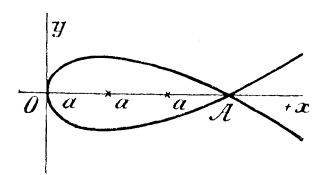


Fig. 32.

$$9\,a\,y^2 = x(x - 3\,a)^2;\ \text{daher ist}$$

$$y = \frac{x - 3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}},\ y' = \frac{x - a}{2\sqrt{ax}},\ \text{also}$$

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{(x - a)^2}{4\,ax}}\,dx = \int_0^x \frac{x + a}{2\sqrt{ax}}\,dx = \frac{1}{3}\,(x + 3\,a)\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Für die halbe Schleife erhält man mit $x = 3a$

$$s = 2a\sqrt{3}\,.$$

Ganze Schleife $= 4a\sqrt{3}\,.$

3. Für die Parabel $x^2 = 2py$ ergiebt sich

$$y = \frac{x^2}{2p},\ y' = \frac{x}{p}$$

und somit als Länge des Kurvenbogens OP (vergl. § 15 Nr. 8)

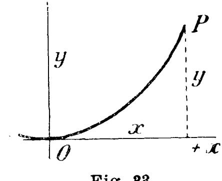


Fig. 33.

$$OP = s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{p} \left\{ \frac{p^2}{2} l(\sqrt{x^2 + p^2} + x) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + p^2} \right\}_0^x$$

$$= \frac{p}{2} l \frac{\sqrt{x^2 + p^2} + x}{p} + \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2}.$$

4. Die Kettenlinie (Fig. 34) hat die Gleichung

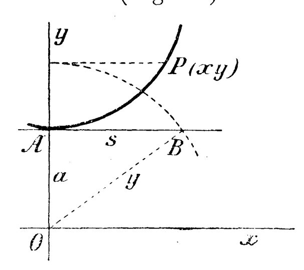


Fig. 34.

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

daher ist

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ und}$$

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2 - a^2} = AB;$$

somit gilt der

Satz: Der Bogen der Kettenlinie vom tiefsten Punkt A derselben bis zu einem beliebigen Kurvenpunkt P(x y) ist gleich $\sqrt{y^2 - a^2}$, wo y die Ordinate dieses Punkts ist.

5. Rektifikation der Ellipse. In Funktion eines Parameters t lassen sich die Koordinaten eines Ellipsenpunkts darstellen durch

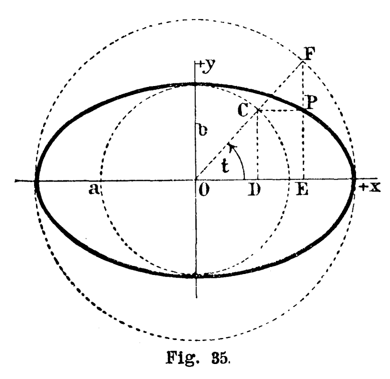


Fig. 35.

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

$$dx = -a \sin t\, dt, \quad dy = b \cos t\, dt.$$

Bezeichnet man nun mit s die ganze Länge der

Ellipse, so ist

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt,$$

wo $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die numerische Excentricität bezeichnet.

Dieses Integral ist als ein elliptisches nicht in endlicher Form darstellbar. Entwickelt man jedoch die Quadratwurzel nach Potenzen von $\cos^2 t$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, so folgt

$$\frac{s}{4} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos t^2 - \frac{\varepsilon^4}{8} \cos^4 t - \frac{\varepsilon^6}{16} \cos^6 t - \ldots\right) dt$$

$$= \frac{a\pi}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - 3\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \varepsilon^4 - 5\left(\frac{1}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon^6 - \ldots\right\},$$

womit der Bogen der Ellipse durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt ist. — Für $a = b$ oder $\varepsilon = 0$ geht die Ellipse in einen Kreis über, dessen Quadrant bekanntlich einen Bogen von der Länge $\frac{s}{4} = \frac{\pi}{2} a$ besitzt.

§ 31. Rektifikation in Polarkoordinaten.

Wendet man Polarkoordinaten an

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

so folgt hieraus

$$dx = dr \cos \varphi - r \sin \varphi\, d\varphi, \quad dy = dr \sin \varphi + r \cos \varphi\, d\varphi.$$

Setzt man diese Werte in $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ein, so ergiebt sich für das Linienelement der Ausdruck

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \qquad (1)$$

und hieraus durch Integration als Länge des Kurvenbogens PQ

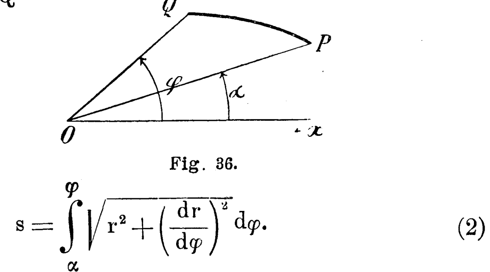


Fig. 36.

$$s = \int_{\alpha}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi. \qquad (2)$$

Satz: In Polarkoordinaten ist die Länge des Kurvenbogens PQ = s zwischen den Punkten P bezw. Q vom Azimut α bezw. φ angegeben durch das bestimmte Integral (2).

Beispiele:

1. Für die Spirale des Archimedes ist

$$r = a\varphi, \quad r' = a,$$

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a \int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi + 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\left\{\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + l\,(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})\right\}.$$

Vergleiche § 15, 8.

2. Für die Cardioide (Fig. 24) ist

$$r = 2a(1 + \cos\varphi), \quad r' = -2a\sin\varphi$$

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = 2a \int_0^{\varphi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi$$

$$= 4a \int_0^{\varphi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Für $\varphi = \pi$ ergiebt sich hieraus als halber Umfang der Cardioide:

$$\frac{S}{2} = 8a; \text{ somit } S = 16a.$$

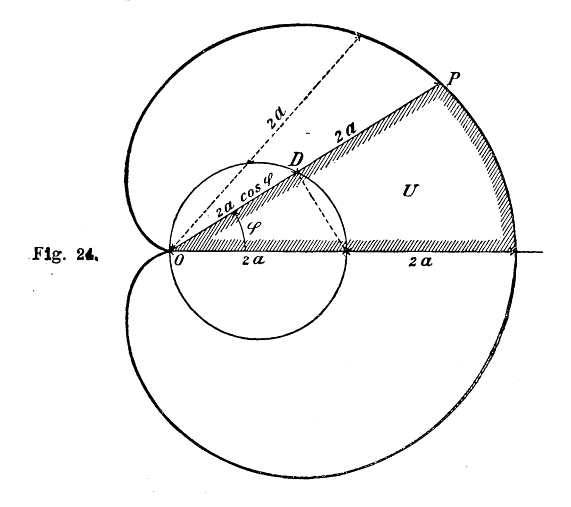


Fig. 24.

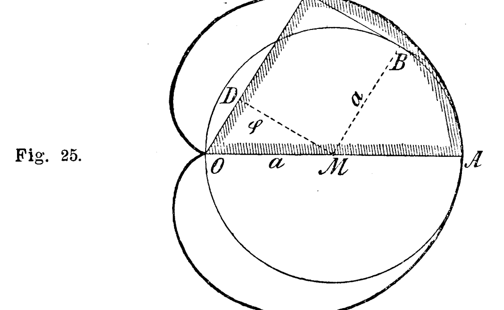


Fig. 25.

3. Für die gewöhnliche Fusspunktkurve des Kreises (Fig. 25) $r = a(1 + \cos\varphi)$ ist ebenso

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 4a \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Die ganze Kurve hat somit die Länge $S = 8a$.

4. Für die allgemeinen Fusspunktskurve (Fig. 26) deren Gleichung $r = a - (a - b)\cos\varphi$ ist, ergiebt sich als Kurvenlänge

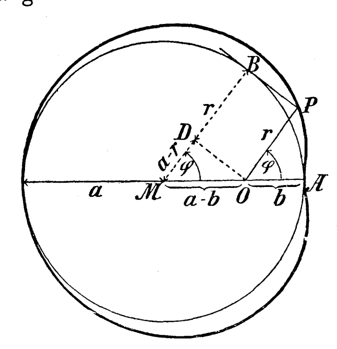


Fig. 26.

$$S = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2 + (a-b)^2 - 2a(a-b)\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= 2(2a-b)\int_0^\pi \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi,$$

wo $$\lambda^2 = \frac{4a(a-b)}{(2a-b)^2} \text{ gesetzt ist.}$$

Dies ist ein elliptisches Integral, das sich in ähnlicher Weise wie der Ellipsenbogen, § 29, durch Reihenentwicklung berechnen lässt. Man erhält nach § 24, Formel (4):

$$S = \pi \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3.\lambda^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\,\lambda^6 \ldots\right\}.$$

5. Für die Cycloide $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ erhalten wir als Länge

$$S = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

§ 32. Teilung von Flächen und ebenen Kurven.

a. Für rechtwinklige Koordinaten.

Nach § 26 ist der Inhalt U der Fläche BCDA dargestellt durch die Formel

$$U = \int_b^a f(x)\, dx.$$

Ist nun $ME = y$ die Ordinate des Punktes M, welche dieselbe halbiert, so ist offenbar

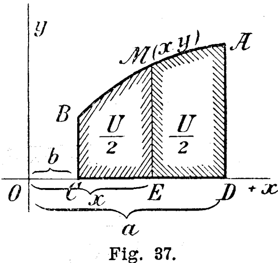


Fig. 37.

$$\int_b^x f(x)\, dx = \int_x^a f(x)\, dx \qquad (1)$$

oder, wenn $F(x)$ das Integral $\int f(x)\, dx$ bezeichnet,

$$F(x) - F(b) = F(a) - F(x)$$

oder

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\{F(a) + F(b)\right\}. \qquad (1)$$

Soll die Fläche BCDA durch die Ordinate y des Punktes M in zwei Teile zerlegt werden, die sich verhalten wie m:n, so berechnet sich die zugehörige Abscisse aus

$$\left.\begin{aligned} &\int_b^x f(x)\,dx : \int_x^a f(x)\,dx = m:n \\ &\text{oder aus} \\ &F(x) = \frac{m\,F(a) + n\,F(b)}{m+n}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ist ebenso M der Mittelpunkt des Bogens PQ (Fig. 37) dessen Koordinaten x, y sein sollen, so berechnet sich die Abscisse dieses Punktes aus der Gleichung

$$\frac{s}{2} = \int_b^x ds = \int_x^a ds \text{ oder}$$

wenn $F(x) = \int ds$ gesetzt wird, aus

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\{F(a) + F(b)\right\}.$$

Der Punkt M teilt den Bogen PQ im Verhältnis m : n, wenn die Bedingung besteht:

$$\left.\begin{aligned} &\int_b^x ds : \int_x^a ds = m:n \text{ oder wenn} \\ &F(x) = \frac{m\,F(a) + n\,F(b)}{m+n}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Satz: Die Abscisse des Punktes M, dessen Ordinate y die Fläche BCDA, bezw. den Bogen BA im Verhältnis m:n teilt, berechnet sich als Wurzel der Gleichung (2), bezw. (3).

b. Für Polarkoordinaten.

Ist die Gleichung der Fläche in Polarkoordinaten r, φ gegeben $r = f(\varphi)$, so berechnet sich das Azimut ψ,

dessen Radiusvektor OP = r die Fläche AOB halbiert, aus

$$\int_{\psi}^{\alpha} r^2 \, d\varphi = \int_{\beta}^{\psi} r^2 \, d\varphi \text{ oder wenn}$$

$\Phi(\varphi) = \int r^2 \, d\varphi$ gesetzt wird, aus

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi(\alpha) + \Phi(\beta) \right\}.$$

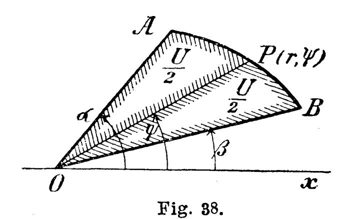


Fig. 38.

Soll sich die Fläche OAP : OBP = m : n verhalten, so erhält man das Azimut ψ des gesuchten Vektors OP aus

$$\left. \begin{aligned} n \int_{\psi}^{\alpha} r^2 \, d\varphi &= m \int_{\beta}^{\psi} r^2 \, d\varphi \text{ oder aus} \\ \Phi(\psi) &= \frac{n \, \Phi(\alpha) + m \, \Phi(\beta)}{m + n} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ist ψ hieraus berechnet, so ergiebt sich der Wert des zugehörigen Vektors aus der Gleichung $r = f(\psi)$.

Ebenso berechnet sich das Azimut ψ desjenigen Vektors, der den Bogen AB im Verhältnis m : n teilt, aus der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} n \int_{\psi}^{\alpha} ds &= m \int_{\beta}^{\psi} ds \text{ oder aus} \\ \Phi(\psi) &= \frac{n \, \Phi(\alpha) + m \, \Phi(\beta)}{m + n}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Beispiele.

1. Die Fläche der Parabel $y = p x^2$ durch eine Parallele zur x-Axe im Verhältnis $m : n$ zuteilen.

Man berechnet die Abscisse x des Punktes P aus

$$n \int_0^x p x^2 \, dx = m \int_x^a p x^2 \, dx$$

und erhält

$$x^3 = \frac{m a^3}{m + n} \text{ und } x = a \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

2. Fläche und Bogen der Cardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ durch einen Radiusvektor zu halbieren.

Die Fläche wird durch einen Vektor vom Azimut ψ halbiert, wenn die Bedingung stattfindet

$$\int_0^\psi r^2 \, d\varphi = \int_\psi^\pi r^2 \, d\varphi, \text{ woraus sich}$$

als (transcendente) Bestimmungsgleichung für ψ ergiebt

$$\cos\psi \sin\psi + 4 \sin\psi - \frac{3}{2}(\pi - 2\psi) = 0.$$

Der Radiusvektor (r, ψ) halbiert den Bogen der Cardioide, wenn

$$\int_0^\psi ds = \int_\psi^\pi ds \text{ oder wenn nach § 31}$$

$$2 \sin\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ oder}$$

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}, \ \psi = \frac{\pi}{3} = 60^0 \text{ und } r = 2a\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3a \text{ ist.}$$

3. Den Kreisquadranten OAB durch Parallelen zu OB in n-gleiche Teile zu teilen.

Sei $PC = y$ die k^{te} Teilgerade, so verhält sich Fläche $BOCP : CPA = k : n - k$; daher erhält man zur Berechnung der Abscisse x des Punktes P die Gleichung

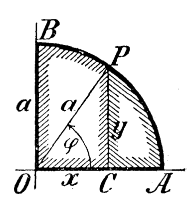


Fig. 39.

$$(n-k)\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = k\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad \text{oder}$$

$$(n-k)\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right\}$$
$$= k\left\{\frac{\pi}{2}a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right\}$$

oder

$$x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}a^2.$$

Setzt man hierin $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ und demgemäss

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \sin\varphi \quad \arcsin\frac{x}{a} = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

so geht unsere Gleichung über in

$$\cos\varphi\sin\varphi - \varphi + \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-k}{n}\right) = 0,$$

die zur Berechnung des Winkels φ dient.

4. Den Quadranten der Lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ durch einen Radiusvektor r, φ zu halbieren.

Man erhält als Bedingungsgleichung zur Berechnung von φ

$$\int_0^{\varphi} \cos 2\varphi \, d\varphi = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi \text{ und hieraus}$$

$$\sin 2\varphi = 1 - \sin 2\varphi \text{ oder}$$

$$2 \sin 2\varphi = 1, \ \sin 2\varphi = \frac{1}{2},$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{6}, \ \varphi = \frac{\pi}{12}; \ r = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

wodurch eine einfache Konstruktion angezeigt ist.

Soll die Fläche allgemein durch einen Radiusvektor im Verhältnis $m:n$ geteilt werden, so berechnet sich das zugehörige Azimut φ aus

$$n \sin 2\varphi = m\,(1 - \sin 2\varphi)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{m}{m+n}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{m}{m+n}$$

und der Vektor selbst aus

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi = \frac{2a^2}{m+n}, \sqrt{n^2 + 2mn}$$

$$r = a\sqrt{\frac{2}{m+n}}\sqrt[4]{2mn + n^2}.$$

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie des Raumes.

§ 33. Kubatur begrenzter Räume.

Erklärung. Unter der Kubatur eines Volumens versteht man gewöhnlich die Berechnung eines Raum-

inhalts, der von ebenen oder gesetzmässig gekrümmten Flächen oder von beiden begrenzt ist.

Eine Ebene $x = x$ parallel zur yz-Ebene schneide aus dem Körper (Fig. 40) eine Scheibe ABC vom Flächeninhalt U_x heraus, der mit Hilfe der gegebenen Flächengleichung $F(xyz) = 0$ in Funktion von x ausgedrückt werden könne:

$$U_x = f(x).$$

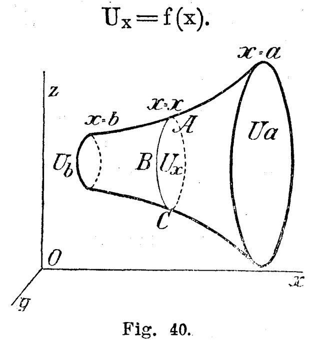


Fig. 40.

Alsdann unterscheidet sich der Rauminhalt, der von der Fläche $F(xyz)$ und den Ebenen x und $x + dx$ begrenzt wird, um eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung von dem Inhalt des Cylinders, der als Grundfläche U und als Höhe dx hat. Dieser Cylinder darf daher an Stelle der Scheibe gesetzt werden. Die Summe aller dieser Scheiben zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$ ist alsdann angegeben durch

$$V = \int_b^a U_x \, dx = \int_b^a f(x) \, dx. \qquad (1)$$

Satz: Der Rauminhalt V, der von den beiden Vertikalebenen $x = b$ und $x = a$ und

der Fläche F begrenzt wird, ist durch das bestimmte Integral (1) ausgedrückt.

Beispiele.

1. Die Gleichung

$$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

stellt ein Paraboloid dar, welches die yz-Ebene in $x = o$ berührt und die zx—, bezw. xy-Ebene nach den

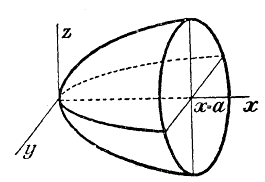


Fig. 41.

Parabeln $z^2 = c^2 x$ bezw. $y^2 = b^2 x$ schneidet. Jeder ebene Schnitt U parallel zur yz-Ebene ist eine Ellipse, welche in der Entfernung x von dieser Ebene den Inhalt $U = \pi b c x$ hat. Der Rauminhalt V des Paraboloids zwischen den Ebenen $x = o$ $x = a$ ist alsdann nach Formel (1)

$$V = \pi \int_o^a bc\, x\, dx = \pi\, bc \left.\frac{x^2}{2}\right|_o^a = \frac{\pi}{2} a^2 bc.$$

2. Das Ellipsoid hat bekanntlich die Gleichung

$$F(x y z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = o.$$

Ein Querschnitt, parallel zur yz-Ebene in der Entfernung x gelegt schneidet dasselbe nach einer Ellipse mit den Axen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und dem Inhalt

$$U = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2) = \pi\, bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

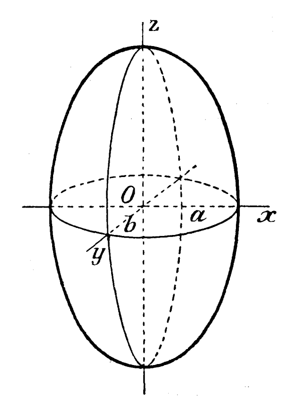


Fig. 42.

Der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist somit angegeben durch

$$V = \int_{-a}^{+a} \pi\, bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi\, abc,$$

woraus für $c = b = a$ als Inhalt einer Kugel vom Radius a hervorgeht

$$V = \frac{4}{3}\pi\, a^3.$$

3. Das einmantlige Hyperboloid (Fig. 43) hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ein Schnitt senkrecht zur z-Axe in der Entfernung z von der xy-Ebene giebt eine Ellipse von den Halbaxen

$$\frac{a}{c}\sqrt{z^2+c^2},\ \frac{b}{c}\sqrt{z^2+c^2}$$

und dem Inhalt

$$U = \pi\frac{ab}{c^2}(z^2+c^2).$$

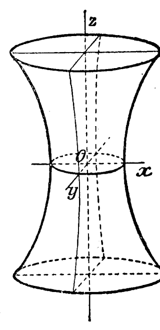


Fig. 43.

Der Rauminhalt des einmantligen Hyperboloides ist daher

$$V = \int_0^h \pi\,ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dx$$

$$= \pi\,abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right).$$

Für $h = c$ folgt hieraus

$$V = \frac{4}{3}\pi\,abc.$$

4. In der Entfernung c von der Ebene eines Kreises vom Radius a liegt parallel zur Kreisebene eine Leitlinie. An dem Kreisumfang und der Leitlinie gleitet beständig senkrecht zu derselben eine Gerade hin. Volumen des erzeugten Conoids?

Es ist

$$U = \triangle PBD = yc = c\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$dV = U\,dx$$
$$V = \int_{-a}^{+a} U\,dx = c\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} = \pi c a^2.$$

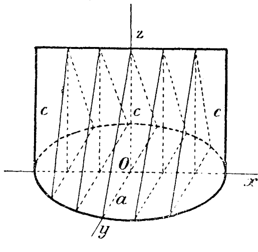


Fig. 44.

Fig. 45.

Scheidet die Leitlinie von der x-Axe, bezw. z-Axe die Stücke a′ und c ab, so ist

$$U = \triangle PBD = yz = yc\left(1 - \frac{x}{a'}\right),$$

daher auch

$$V = \int_{-a}^{+a} U\,dx = c\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\left(1 - \frac{x}{a'}\right)dx$$
$$= \pi c a^2.$$

§ 34. **Kubatur von Rotationskörpern.**

In der xy-Ebene liege die Kurve

$$y = f(x).$$

Dreht sich dieselbe um die x-Axe, so beschreibt irgend ein Punkt P derselben mit den Koordinaten xy einen Kreis vom Radius y, der somit den Inhalt hat

$$U = \pi y^2 = \pi f^2(x). \qquad (1)$$

Legt man in der Entfernung dx von derselben eine

weitere Ebene senkrecht zur x-Axe, so schneidet diese aus dem erzeugten Umdrehungskörper einen zweiten Kreis aus, der mit dem ersteren und der Drehungsoberfläche einen Raum einschliesst, der sich nur um

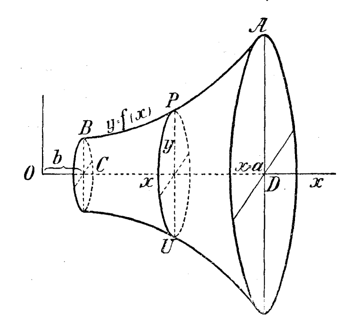


Fig. 46.

ein unendlich Kleines höherer Ordnung von dem Inhalt U dx des Cylinders unterscheidet, der zur Grundfläche U und zur Höhe dx hat. Dieser darf also an Stelle jenes Rauminhalts gesetzt werden. Es ist

$$d\,V = U\,dx = \pi\,y^2\,dx = \pi\,f^2(x)\,dx. \qquad (3)$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration als Inhalt des Drehungskörpers zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$

$$V = \int_b^a U\,dx = \pi \int_b^a y^2\,dx = \pi \int_b^a f^2(x)\,dx. \qquad (2)$$

Satz: Dreht sich eine ebene Kurve $y = f(x)$, die in der xy-Ebene liegt, um die x-Axe, so beschreibt die Fläche BCDA zwischen den Kurvenpunkten A und B mit den Abscissen a und b einen Rotationskörper, dessen Inhalt durch das bestimmte Integral (3) angegeben ist.

Beispiele:

1. Die Parabel $y = px^2$ erzeugt bei der Drehung um die x-Axe einen Umdrehungskörper, dessen Inhalt zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = x$ angegeben ist durch

$$V = \pi \int_0^x y^2 \, dx = \pi \int_0^x p^2 x^4 \, dx = \frac{\pi}{5} p^2 x^5 = \frac{\pi}{5} xy^2.$$

2. Dreht sich die schleifenförmige Kurve

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

um die x-Axe, so ist der Inhalt des erzeugten Rotationskörpers zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = x$

$$V = \pi \int_0^x \frac{x^2}{a^2} (a^2 - x^2) \, dx = \frac{\pi}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} a^2 - \frac{x^5}{5} \right).$$

Die ganze Schleife beschreibt somit einen Körper vom Inhalt

$$V = \frac{4}{15} \pi a^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3.$$

3. Durch Drehung der Cissoide

$$(2a - x) y^2 = x^3$$

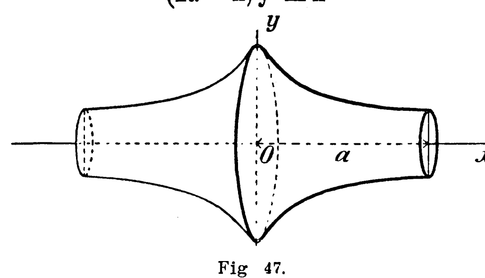


Fig 47.

um die x-Axe wird ein Körper erzeugt, der den Inhalt besitzt

$$V_a = \pi \int_0^a \frac{x^3}{2a - x} dx = \pi 8a^3 \left(12 - \frac{2}{3}\right).$$

4. Der Rotationskörper der Asteroide (Fig. 31)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

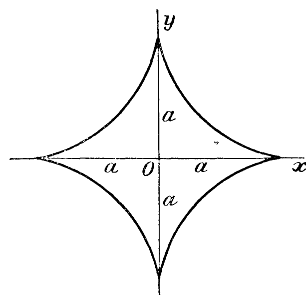


Fig. 31.

hat den Rauminhalt

$$V_x = \pi \int_0^x \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$$

$$= 3\pi x \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{a^4 x^2} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{a^2 x^4} - \frac{x^2}{9}\right).$$

Der ganze Inhalt des erzeugten Körpers ist somit

$$V = \frac{32}{105} \pi a^3 = \frac{8}{35} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3.$$

5. Die Cycloide hat die Gleichungen

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a \cos\varphi.$$

Bei der Drehung um die x-Axe erzeugt dieselbe einen Rotationskörper, dessen Inhalt ist

$$V = \pi \int_0^x y^2 dx.$$

Nun ist $dx = a(1 - \cos\varphi)$, daher ist auch

$$V = \pi a^3 \int_0^{\varphi} (1 - \cos\varphi)^3 d\varphi$$

$$= \pi a^3 \left\{ \varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\sin\varphi \right\}_0^{\varphi}.$$

Der erste Abschnitt $\varphi = 2\pi$ erzeugt daher einen Rotationskörper vom Inhalt

$$V_{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

6. Die Kurve $y^2 b + x^2 a - x^3 = 0$ beschreibt bei der Drehung um die x-Axe einen Rotationskörper, dessen Inhalt ist

$$V = \frac{\pi}{b} \int_a^{x = na} (x^3 - ax^2)\, dx = \frac{\pi a^4}{12 b}(3n^4 - 4n^3 + 1).$$

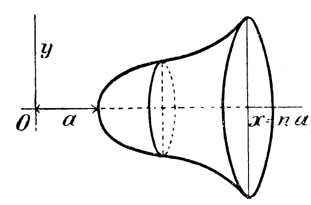


Fig. 48.

§ 35. Kubatur von cylindrischen Räumen.

Gegeben seien die Kurven

$y = f(x)$ in der xy-Ebene und

$z = \varphi(x)$ in der zx-Ebene.

Gesucht sei der Rauminhalt V, der von den Cylinderflächen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ und den beiden parallelen Ebenen $x = b$ und $x = a$ eingeschlossen wird. Eine

Ebene $x = x$ senkrecht zur x-Axe schneidet aus dem Körper ein Rechteck PADB von den Seiten

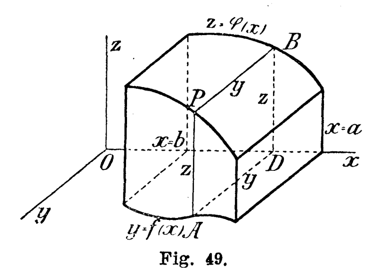


Fig. 49.

$$PA = z = \varphi(x) \text{ und } PB = y = f(x)$$

heraus, welches somit den Inhalt

$$U = yz = f(x)\varphi(x)$$

hat. Der Inhalt des Körpers zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$ ist somit angegeben durch

$$V = \int_b^a yz\,dx = \int_b^a f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Satz: Der Inhalt des cylindrischen Raumes, der von den beiden Cylinderflächen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, den Ebenen $x = b$ und $x = a$, der zx-Ebene und xy-Ebene eingeschlossen wird, ist angegeben durch das bestimmte Integral (1).

Beispiele:

1. Inhalt des Körpers, der von den beiden Cylindern

$$y^2 = x(2a - x), \quad z^2 = 4ax,$$

der zx- und der xy-Ebene begrenzt wird.

Man erhält

$$y = \sqrt{x(2a - x)}, \quad z = 2\sqrt{ax}$$

$$V = \int_0^{2a} 2\sqrt{ax^2(2a - x)}\,dx = 2\sqrt{a}\int_0^{2a} x\sqrt{2a - x}\,dx.$$

Setzt man nun

$$\sqrt{2a-x} = t, \quad x = 2a - t^2, \quad dx = -2t\,dt,$$

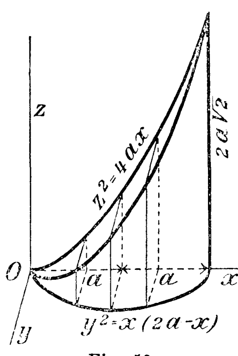


Fig. 50.

so ergiebt sich nach § 13, b. 3

$$\int x\sqrt{2a-x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(2a-x)^5} - \frac{4}{3}a\sqrt{(2a-x)^3},$$

daher ist

$$V = \frac{32}{15}a^3\sqrt{2}.$$

2. Der Rauminhalt, der von den beiden parabolischen Cylinderflächen

$$z^2 = ax, \quad y^2 = bx,$$

der Ebene $x = x$ und der zx-Ebene erzeugt wird,

$$V = \int_0^x \sqrt{ax}\sqrt{bx}\,dx = \sqrt{ab}\,\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}xyz.$$

3. Den Rauminhalt zu bestimmen, der von der Ebene $z = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, der Cylinderfläche $x^2 + y^2 = a^2$, der xy- und zx-Ebene begrenzt wird.

Es ist $y = f = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \varphi = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

daher

$$V = \int_0^a \operatorname{tg}\alpha\, x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

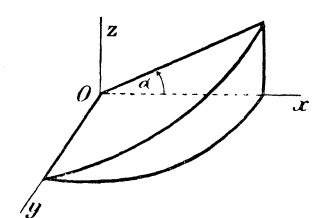


Fig. 51.

4. Man berechne den Rauminhalt, der von den Cylinderflächen

$$y = f(x) = \sqrt{x(a-x)},\quad z = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und der zx-Ebene begrenzt wird.

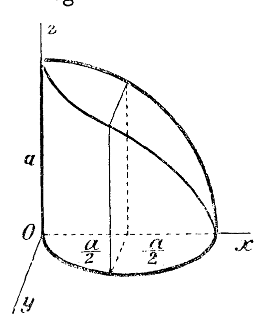


Fig. 52.

Man erhält

$$V = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{ax - x^2}\, dx = \int_0^a (a - x)\sqrt{ax + x^2}\, dx$$

$$= \int_0^a \frac{a^2 x - x^3}{\sqrt{ax + x^2}} dx = \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{5}{12} ax + \frac{3}{8} a^2\right)\sqrt{ax + x^2}$$

$$- \frac{3}{16} a^3 l \left(\frac{a}{2} + x + \sqrt{ax + x^2}\right)$$

$$= \frac{11}{24} a^3 \sqrt{2} - \frac{3}{16} a^3 l (3 + 2\sqrt{2}).$$

5. Den Rauminhalt zu berechnen, der von den beiden Cylinderflächen

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und den drei Koordinatenebenen begrenzt ist.

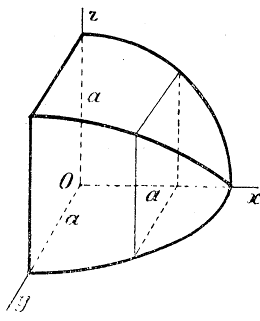


Fig. 53.

Es ist

$$\frac{1}{8} V = \int_0^a yz \, dx = \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{2}{3} a^3, \text{ somit}$$

$$V = \frac{16}{3} a^3.$$

§ 36. Oberflächenberechnung (Komplanation) von Rotationskörpern.

In der xy-Ebene liege die Kurve $y = f(x)$. Wird dieselbe um die x-Axe gedreht, so beschreibt irgend ein Punkt P derselben einen Kreis vom Radius $y = f(x)$, dessen Umfang

$$2\pi y = 2\pi f(x)$$

ist. Die Sehne $PP' = ds$, welche den Punkt P mit

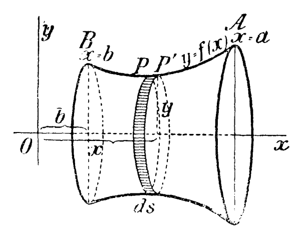


Fig. 54.

dem benachbarten Punkt P′ verbindet, beschreibt hiebei eine reifförmige Fläche, deren Inhalt

$$dU = 2\pi y\, ds = 2\pi f(x)\, ds \qquad (1)$$

ist. Hieraus ergiebt sich aber durch Integration als Oberfläche des Umdrehungskörpers, den der Kurvenbogen BA zwischen den Punkten B und A mit den Abscissen b und a beschreibt:

$$U = 2\pi \int_b^a y\, ds = 2\pi \int_b^a f(x)\, ds. \qquad (2)$$

Nun ist bekanntlich $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, daher ist diese Oberfläche auch angegeben durch

$$U = 2\pi \int_b^a f(x) \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (3)$$

Satz: Der Kurvenbogen AB zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ beschreibt bei der Drehung um die x-Axe eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch das bestimmte Integral (3) angegeben ist.

Beispiele.

1. Oberfläche der Halbkugel, erzeugt durch Drehung eines Viertelkreises um die x-Axe.

Es sei $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung eines Kreises vom Radius a, dann ist

$$U = 2\pi \int_0^a y\, ds = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, ds.$$

Nun ist $ds = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, daher

$$U = 2\pi \int_0^a a\, dx = 2\pi a^2.$$

Die Oberfläche der ganzen Kugel ist daher, wie bekannt, $O = 2\, U = 4\pi a^2$.

2. Rotationsoberfläche der Sinuslinie $y = \sin x$

$$U_x = 2\pi \int_0^x y\, ds.$$

Es ist $y' = \cos x$, $ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$, daher

$$U_x = 2\pi \int_0^x \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = -2\pi \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, d\cos x$$

$$= -2\pi \left\{ \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{2} l \left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) \right\}_0^x$$

Ein Abschnitt der Sinuslinie beschreibt somit bei der Drehung um die x-Axe die Oberfläche

$$U_\pi = -2\pi\left\{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}l(-1+\sqrt{2})\right\}$$
$$+2\pi\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}l(1+\sqrt{2})\right\}$$
$$=4\pi\sqrt{2}.$$

3. Fläche erzeugt durch Drehung der Parabel $y^2 = 2px$ um die x-Axe.

Es ist

$$y=\sqrt{2px},\ y'=\sqrt{\frac{p}{2x}},\ ds=\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}\,dx,$$

somit

$$U_x = 2\pi\int_0^x \sqrt{2px}\,.\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^x\sqrt{p+2x}\,dx$$
$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,(p+2x)\sqrt{p+2x}.$$

4. Rotationsfläche der Asteroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.
Man erhält

$$\frac{1}{2}O = 2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$
$$=\frac{6}{5}\pi a^2;$$

somit
$$O=\frac{12}{5}\pi a^2 = \frac{3}{5}\,.\,4\pi a^2.$$

5. Für die Cycloide $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1-\cos\varphi)$ ergiebt sich $dx = a(1-\cos\varphi)$, $dy = +a\sin\varphi$,

$$y' = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi},\ ds = 2a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

somit ist

$$U = 2\pi\int_0^x y\,ds = 16\pi a^2\int_0^\varphi \sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2}$$

$$= -\frac{16}{3}\pi a^2 \cos\frac{\varphi}{2}\left(2+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für $\varphi = 2\pi$ folgt hieraus als Oberfläche eines rotierenden geschlossenen Cycloidenabschnitts

$$U_{2\pi} = \frac{32}{3}\pi a^2 = \frac{8}{3}.4\pi a^2.$$

§ 37. Oberfläche von Cylinderflächen.

1. Gegeben seien die beiden Cylinderflächen

$$y = f(x) \text{ und } z = \varphi(x),$$

die sich nach der Raumkurve PQ durchdringen.

Man suche den Inhalt der Scheitelfläche PCDQ und der Stirnfläche PABQ zu ermitteln.

Hat Punkt T die Koordinaten xyz, so darf der Flächenstreifen TS bis auf eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung mit einem Rechteck von der Breite $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ und der Länge y verwechselt werden, daher ist näherungsweise das Element der Cylinderfläche PCDQ

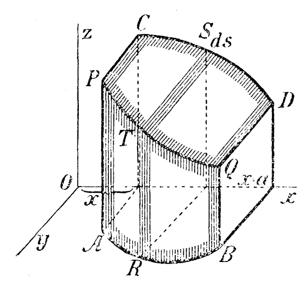


Fig. 55.

$$d\,U_{zx} = y\,ds = y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (1)$$

Ebenso ergiebt sich als Element der Cylinderfläche PABQ

$$d\,U_{yx} = z\,ds = z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,; \qquad (2)$$

somit ist

$$\text{Scheitelfläche PCDQ} = U_{zx} = \int_x^a y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_x^a f x)\sqrt{1+\varphi'^2}\,dx\,; \quad (3)$$

$$\text{Stirnfläche PABQ} = U_{yx} = \int_x^a z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_x^a \varphi(x)\sqrt{1+f'^2}\,dx. \quad (4)$$

Satz: Die Oberfläche der Cylinderfläche PCDQ, bezw. PABQ ist angegeben durch das bestimmte Integral (3) bezw. 4.

2. Ist an Stelle der Cylinderfläche $z = \varphi(x)$ die allgemeinere Fläche $z = F(x\,y)$ gegeben, welche die Cylinderfläche nach der Kurve PQ schneiden möge, so ist die Oberfläche PABA $= U$ des letzten Cylinders dargestellt durch:

$$U = \int z\,ds = \int F(x\,y)\sqrt{1+f'^2}\,dx \text{ oder}$$

$$U = \int_x^a F(x, f)\sqrt{1+f'^2}\,dx. \qquad (5)$$

Beispiele:

1. Rauminhalt, Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Cylinder zu berechnen:

$$y^2 = ax - x^2,\ z^2 = 4\,ax.$$

α) Der Rauminhalt ist nach § 35

$$V = \int_0^a yz\,dx = \int_0^a \sqrt{4ax}\sqrt{ax - x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - ax}\,dx = \frac{8}{15}a^3.$$

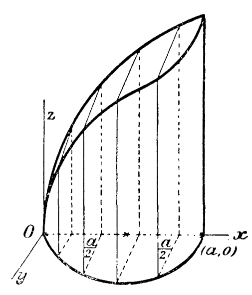


Fig. 56.

β) Stirnfläche $= \int_0^a z\,ds$

$$y = \sqrt{ax - x^2},\; y' = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}},\;\; ds = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}},$$ somit

$$\text{Stirnfläche} = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = 2a^2.$$

γ) Scheitelfläche $= \int_0^a y\,ds_1$

$$z = 2\sqrt{ax},\;\; z' = \frac{a}{\sqrt{ax}} = \sqrt{\frac{a}{x}},\;\; ds_1 = \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx,$$

somit

$$\text{Scheitelfläche} = \int_0^a \sqrt{ax - x^2}\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a$$

$$= \frac{\pi}{4}a^2.$$

2. Durchdringung von Kreiscylinder und Kugel

$$y = \sqrt{ax - x^2}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - ax}.$$

Man erhält

$$y' = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}, \quad ds = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}},$$

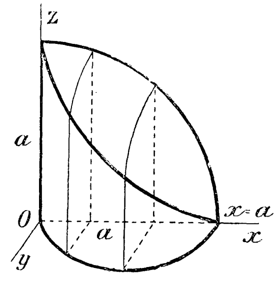


Fig. 57.

somit ist Cylinderfläche POA (Fig. 57)

$$U_a = \int_0^a z\,ds = \frac{a}{2}\int_0^a \sqrt{a^2 - ax}, \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = a^2.$$

3. Durchdringung der Cylinderfläche $y^2 = ax - x^2$ mit der Kegelfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Man erhält wie in Nr. 2:

$$y = \sqrt{ax - x^2},\ ds = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

und somit für die ganze Oberfläche des Cylinders zwischen xy-Ebene und Kegelfläche

$$2\,U = 2\int_0^a z\,ds = 2\int_0^a \frac{c}{a}\sqrt{ax}\,\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

$$= -2c\sqrt{a^2 - ax}\,\Big|_0^a = 2\,a\,c.$$

§ 38. Rektifikation von Raumkurven.

Eine Raumkurve kann als Durchdringungskurve zweier Flächen, z. B. zweier zu den Koordinatenebenen senkrechten Cylinderflächen betrachtet werden, dann hat sie die Gleichungen

$$x = x, \quad y = f(x), \quad z = g(x). \qquad (1)$$

Sind die Koordinaten eines Punktes im Raum als Funktionen eines Parameters t ausgedrückt, so ist die Raumkurve auch dargestellt durch

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \qquad (2)$$

Sind alsdann P und P′ zwei benachbarte Punkte derselben mit den Koordinaten xyz; $x + \triangle x$, $y + \triangle y$, $z + \triangle z$, so ist deren Entfernung angegeben durch

$$\triangle s = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}. \qquad (2)$$

Rücken die beiden Punkte P und P′ unendlich nahe zusammen, so ergiebt sich hieraus als Linienelement der Raumkurve

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (3)$$

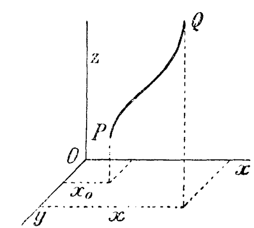


Fig. 58.

oder auch

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (4)$$

Durch Integration folgt endlich hieraus als Länge des Kurvenbogens zwischen zwei Punkten P und Q mit den Abscissen x_0 und x

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2 + g'^2}\, dx \text{ oder} \qquad (4)$$

$$s = \int_{x_0 = \varphi(t_0).}^{x = \varphi(t)} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt. \qquad (6)$$

Beispiele:

1. Die Schraubenlinie (Fig. 59) hat die Gleichungen

$$x = r\cos t,\ \ y = r\sin t,\ \ z = \frac{h}{2\pi} t,$$

daher ist

$$x' = -r\sin t,\ \ y' = r\cos t,\ \ z' = \frac{h}{2\pi},$$

somit

$$s = \int_0^t \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi r^2 + h^2}\, t.$$

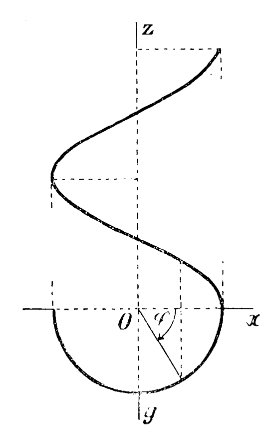


Fig. 59.

2. Die im vorigen §, Aufgabe 2, auftretende sphärische Kurve hat in Polarkoordinaten die Gleichungen

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos\varphi),\quad y = \frac{a}{2}\sin\varphi,\quad z = a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt

$$x' = -\frac{a}{2}\sin\varphi,\quad y' = \frac{a}{2}\cos\varphi,\quad z' = -\frac{a}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Der Bogen AP (Fig. 57) hat alsdann die Länge

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi.$$

Das Integral ist ein elliptisches und kann auf die Form gebracht werden

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi,$$

welche eine Berechnung durch Reihenentwicklung gestattet.

3. Die Länge der Schnittkurve der beiden Flächen

$$y = \frac{2x^3}{3a^2}, \quad z = \frac{x^2}{a}$$

vom Ursprung bis zum Punkt P (xyz) zu berechnen.

Man erhält

$$y' = \frac{2x^2}{a^2}, \quad z' = \frac{2x}{a}$$

und daher nach Formel (3)

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4x^4}{a^4}}\,dx = \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right)dx.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$s = \int_0^x \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right)dx = x + \frac{2x^3}{3a^2} = x + y.$$

VIII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Statik.

§ 39. Momente eines Punktsystems.

Erklärung. Hat ein materieller Punkt P_i, in welchem wir uns die Masse m_i vereinigt denken können, von einer festen Geraden g die Entfernung p_i, so heisst das Produkt

$$M_r = p_i^r\, m_i, \qquad (1)$$

das „Moment r^{ter} Ordnung“ der Masse m_i in Bezug auf die Gerade g_i.

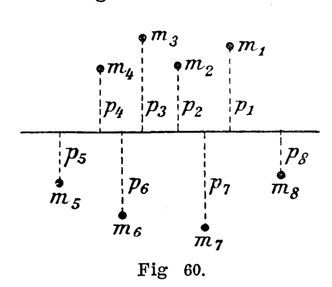


Fig 60.

Sind eine Reihe von Punkten $P_1 P_2 \ldots P_n$ mit den Massen m_1, m_2, ... m_n gegeben, die von g die Entfernungen $p_1 p_2 \ldots p_n$ haben sollen, so heisst ebenso

$$M_r = \sum_{i=1}^{i=r} p_i^r m_i = m_1 p_1^r + m_2 p_2^r + \ldots + m_n p_n^r \quad (2)$$

das „Moment r^{ter} Ordnung des Punktsystems $P_1, P_2 \ldots P_n$“ in Bezug auf die „Momentaxe“ g.

Für $r = 0$ geht die Gleichung (1) über in

$$M_0 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i = m_1 + m_2 + \ldots + m_n, \quad (3)$$

das heisst in die der Gesamtsumme des Massensystems m_i.

Für $r = 1$ heisst

$$M_1 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i m_i = p_1 m_1 + p_2 m_2 + \ldots + p_n m_n \quad (4)$$

das statische Moment des Punktsystems $P_1 P_2 \ldots P_n$ in Bezug auf die Momentaxe g.

Wählt man p so, dass

$$\left.\begin{array}{l} p\,\Sigma m_i = \Sigma p_i m_i \text{ oder} \\ p = \dfrac{\Sigma p_i m_i}{\Sigma m_i} = \dfrac{M_1}{M_0} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

ist, so heisst $p M_0 = p\,\Sigma m_i$ das statische Moment des Schwerpunkts.

Für $r=2$ heisst

$$M_2 = \Sigma p_i^2 m_i = p_1^2 m_1 + p_2^2 m_2 + \ldots + p_n^2 m_n \qquad (6)$$

das „Trägheitsmoment" des Massensystems in Bezug auf die „Trägheitsaxe" g.

Denkt man sich die Massen $m_1 m_2 \ldots m_n$ nicht in einzelnen Punkten der Ebene liegend, sondern auf einer Kurve, einer Fläche oder auch im Raum stetig verteilt, so treten an Stelle der Summenformeln (2) bis (6) Integrale, wie die folgenden Paragraphe zeigen werden.

§ 40. Schwerpunkt von krummen Linien.

1. Nehmen wir an, irgend eine Masse sei auf einer Kurve stetig verteilt und die Dichte der Belegung sei konstant und gleich ϱ, so ist $\varrho\,ds$ die Masse, welche längs des Kurvenelements ds verteilt ist. Die statischen Momente dieser Masse in Bezug auf die beiden Koordinatenaxen sind alsdann

$$\varrho\,y\,ds \text{ bezw. } \varrho\,x\,ds.$$

Durch Integration ergeben sich hieraus die statischen Momente des ganzen Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abscissen a und b

$$\int_b^a \varrho\,y\,ds \text{ bezw. } \int_b^a \varrho\,x\,ds. \qquad (1)$$

Erklärung. Der Schwerpunkt S eines Gebildes ist derjenige Punkt, in welchem man sich die Masse

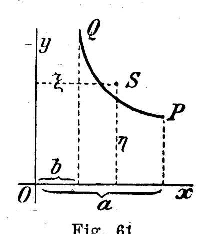


Fig. 61.

des ganzen Gebildes vereinigt denken kann. Hat derselbe die Koordinaten $\xi\,\eta$, so sind

$$\eta\int_b^a \varrho\, ds \text{ bezw. } \xi\int_b^a \varrho\, ds \qquad (2)$$

die statischen Momente des Schwerpunkts des Bogens PQ in Bezug auf die x-Axe bezw. y-Axe. Da nun im Falle des Gleichgewichts die entsprechenden Momente von (1) und (2) einander gleich sein müssen, so ist

$$\eta\int\varrho\, ds = \int\varrho\, y\, ds, \quad \xi\int\varrho\, ds = \int\varrho\, x\, ds \text{ oder}$$

$$\xi = \frac{\int_b^a x\, ds}{\int_b^a ds}, \quad \eta = \frac{\int_b^a y\, ds}{\int_b^a ds} \qquad (3)$$

womit die Schwerpunktskoordinaten des Bogens PQ bestimmt sind.

Satz: **Die Schwerpunktskoordinaten eines Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abscissen a und b sind dargestellt durch die Ausdrücke (3).**

2. Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben $r = f(\varphi)$, so ist $\varrho\, ds\, r \sin\varphi$ das Moment des Elements ds in Bezug auf die Polaraxe x und ebenso $\varrho\, ds\, r \cos\varphi$ das Moment desselben in Bezug auf die y-Axe. Das Moment des ganzen Bogens in Bezug auf die Polaraxe bezw. y-Axe ist daher

$$\varrho \int_\beta^\alpha ds\, r \sin\varphi, \quad \text{bezw.} \quad \varrho \int_\beta^\alpha ds\, r \cos\varphi.$$

Sind ξ, η die Koordinaten des Schwerpunkts des Bogens PQ, so berechnen sich dieselben aus

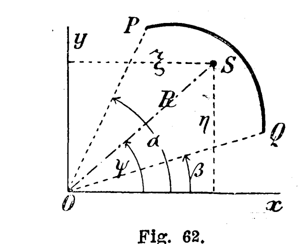


Fig. 62.

$$= \frac{\int_\beta^\alpha r \cos\varphi\, ds}{\int_\beta^\alpha ds}, \quad \eta = \frac{\int_\beta^\alpha r \sin\varphi\, ds}{\int_\beta^\alpha ds}.$$

Die zugehörigen Polarkoordinaten des Schwerpunkts sind alsdann angegeben durch

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\eta}{\xi}.$$

1. Für den Schwerpunkt des Viertelskreisbogens ergiebt sich

$$\xi = \eta = \frac{\int_0^a x\,ds}{\int_0^a ds} = \frac{\int_0^a y\,ds}{\int_0^a ds} = \frac{2a}{\pi}.$$

2. Für den Schwerpunkt des Asteroidenbogens erhält man mit Berücksichtigung von § 29 Beispiel 1

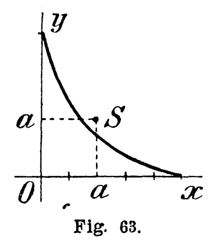


Fig. 63.

$$\xi = \eta = \frac{\int_0^a x\,ds}{\frac{3}{2}a} = \frac{\int_0^a y\,ds}{\frac{3}{2}a}$$

$$\int x\,ds = \int x\,a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} a^2;$$

somit ist

$$\xi = \eta = \frac{3}{5} a^2 : \frac{3}{2} a = \frac{2}{5} a.$$

3. Die Koordinaten des Schwerpunkts des Bogens der Kurve (Fig. 32)

$$9\,a\,y^2 = x\,(x - 3\,a)^2$$

vom Ursprung bis zum Punkt mit der Abscisse x zu berechnen.

Man erhält

$$y' = \frac{x-a}{2\sqrt{ax}}, \quad s = \int_0^x \frac{x+a}{2\sqrt{ax}}\,ds = \frac{x+3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\int_0^x x\,ds = \int_0^a \frac{x^2+ax}{2\sqrt{ax}}\,dx = \frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^x y\,ds = \frac{1}{3a}\int_0^x (x-3a)(x+a)\,dx = \frac{x}{9a}(x^2 - 3ax - 9a^2),$$

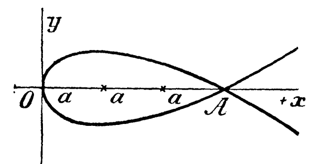


Fig. 32.

daher ist

$$\xi = \frac{x(3x+5a)}{5(x+3a)}, \quad \eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} \cdot \frac{x^2 - 3ax - 9a^2}{x+3a}.$$

Für $x = 3a$ folgt hieraus

$$\xi = \frac{4}{5}a, \quad \eta = -\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

4. Für den Schwerpunkt des Bogens der Cycloide

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1-\cos\varphi)$$

erhalten wir

$$\xi = \frac{\int_0^{2\pi} x\,ds}{\int_0^{2\pi} ds} = \frac{\pi\, 8a^2}{8a} = \pi a, \quad \eta = \frac{\int_0^{2\pi} y\,ds}{\int_0^{2\pi} ds}$$

$$= \frac{32}{3}a^2 : 8a = \frac{4}{3}a.$$

§ 41. Schwerpunkt von ebenen Figuren.

a) Denkt man sich die Fläche PABQ durch Parallelen zur y-Axe in Streifen von der Breite dx geteilt, so ist der Inhalt eines solchen bis auf eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung durch das Pro-

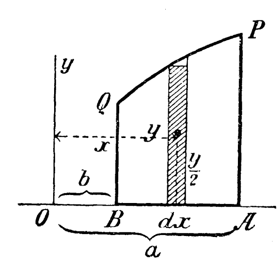


Fig. 64.

dukt y dx angegeben. Ist die Dichte der Flächenbelegung konstant und gleich ϱ, so ist ϱ y dx dessen Masse und sind

$$\frac{y}{2} \cdot \varrho\, y\, dx \quad \text{bezw.} \quad x \cdot \varrho\, y\, dx$$

die Massenmomente jenes Streifens in Bezug auf die x-Axe, bezw. y-Axe. Die Massenmomente der ganzen Fläche in Bezug auf diese Axen sind daher angegeben durch

$$\frac{1}{2}\int_b^a \varrho\, y^2\, dx \quad \text{bezw.} \quad \int_b^a \varrho\, x y\, dx.$$

Sind daher ξ und η die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche PABQ, so gelten die Gleichungen

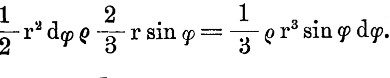
$$\eta \int_b^a \varrho\, y\, dx = \frac{1}{2}\int_b^a \varrho\, y^2\, dx, \quad \xi \int_b^a \varrho\, y\, dx = \int_b^a \varrho\, x\, y\, dx,$$

woraus folgt

$$\xi = \frac{\int_b^a x\,y\,dx}{\int_b^a y\,dx}, \quad \eta = \frac{1}{2}\,\frac{\int_b^a y^2\,dx}{\int_b^a y\,dx}. \tag{1}$$

Satz: Die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche PABQ sind angegeben durch die Gleichungen (1).

b) Ist $r = f(\varphi)$ die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten, so hat der Schwerpunkt des unendlich kleinen Flächenstücks OPP′ zwischen den Radien $r = f(\varphi)$ und $r + dr = f(\varphi + d\varphi)$ vom Inhalt $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$ vom Pol O die Entfernung $\frac{2}{3} r$ und daher von der Polaraxe die Entfernung $\frac{2}{3} r \sin\varphi$. Das Massenmoment des Flächenstücks OPP′ in Bezug auf diese Axe ist daher



$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi\, \varrho\, \frac{2}{3} r \sin\varphi = \frac{1}{3} \varrho\, r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

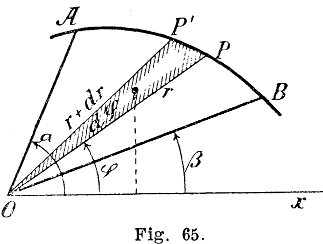


Fig. 65.

Die ganze Fläche AOB zwischen den Azimuten α und β hat somit in Bezug auf die Axe das Moment

$$\frac{\varrho}{3}\int_{\beta}^{\alpha} r^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Ist daher p die Entfernung des Schwerpunkts der Fläche AOB von der Polaraxe, so ist

$$\frac{\varrho}{3}\int_{\beta}^{\alpha} r^3 \sin\varphi \, d\varphi = p \, \frac{\varrho}{2}\int_{\beta}^{\alpha} r^2 \, d\varphi,$$

woraus sich p berechnet

$$p = \frac{\frac{1}{3}\int_{\beta}^{\alpha} r^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} r^2 \, d\varphi}. \qquad (2)$$

Das Azimut ψ des Schwerpunkts der Fläche AOB bestimmt sich aus der Bedingung, dass die beiden Flächen AOC und COB gleich sein müssen:

$$\int_{\beta}^{\psi} r^2 \, d\varphi = \int_{\psi}^{\alpha} r^2 \, d\varphi. \qquad (3)$$

Ist alsdann R der Radiusvektor des Schwerpunkts, so ist

$$R = \frac{p}{\sin\psi}. \qquad (4)$$

Satz: In Polarkoordinaten berechnen sich die Elemente p, ψ, R des Schwerpunkts der Fläche AOB aus (2), (3) und (4).

Beispiele:

1. Schwerpunkt der Fläche der Parabel $y^2 = 2px$. Man erhält

$$\xi = \frac{\int_0^x x\sqrt{2px}\,dx}{\int_0^x \sqrt{2px}\,dx} = \frac{3}{5}x,\quad \eta = \frac{\int_0^x 2px\,dx}{\int_0^x \sqrt{2px}\,dx} = \frac{3}{8}y.$$

2. Für den Schwerpunkt des Kreisquadranten $x^2 + y^2 = a^2$ erhält man nach Formel (2)

$$\xi = \eta = p = \frac{\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\, d\varphi} = \frac{4a}{3\pi}.$$

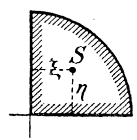


Fig. 66.

3. Den Schwerpunkt der Cycloidenfläche zu bestimmen.

Es ist

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),\qquad y = a(1 - \cos\varphi),$$

daher $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,\quad dy = -a\sin\varphi\,d\varphi$ und

$$\xi = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{a^3\int_0^{2\pi}(\varphi - \sin\varphi)(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi}{a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi}$$

$$= \frac{3\pi^2 . a^3}{3\pi a^2} = \pi a.$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2(1+\cos\varphi)d\varphi}{a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}\pi\,a^3}{3\pi\,a^2} = \frac{5}{6}\,a.$$

§ 42. Schwerpunkt einer beliebigen Figur.

Es sei der Schwerpunkt der Fläche U gesucht, die von den beiden Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$, sowie den beiden zur x-Axe senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Man erhält als Flächeninhalt

$$U = \int\limits_b^a \left\{ f(x) - \varphi(x) \right\} dx \qquad (1)$$

und als Moment in Bezug auf die y-Axe nach § 41

$$M\,y = \int\limits_b^a \quad \left\{ f(x) - \varphi(x) \right\} dx. \qquad (2)$$

Um das Moment in Bezug auf die x-Axe zu berechnen, ist zu bemerken, dass das Rechteck $[f(x) - \varphi(x)]\,dx$ an Stelle des elementaren Flächenstreifens zwischen den Ordinaten der Abscissen x und $x + dx$ gesetzt werden darf und dieses Rechteck die Schwerpunktsordinate besitzt $\frac{1}{2}[f(x) + \varphi(x)]$; daher ist

$$Mx = \int\limits_b^a \frac{1}{2}\left\{ f(x) + \varphi(x) \right\} \left\{ (x) - \varphi(x) \right\} dx \text{ oder}$$

$$Mx = \frac{1}{2}\int_b^a \left\{f^2 - \varphi^2\right\} dx. \tag{3}$$

Es ergeben sich somit als Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = \frac{My}{U}, \quad \eta = \frac{Mx}{U}. \tag{4}$$

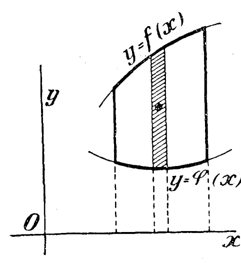


Fig. 67.

Satz: Die Schwerpunktskoordinaten der Fläche, welche von den beiden Kurven $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ und dcn beiden Parallelen zur y-Axe $x = b$ und $x = a$ begrenzt wird, sind angegeben durch die bestimmten Integrale (4).

Beispiele:

1. Die beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ oder

$$y = \sqrt{2px} = f \text{ und } y = \frac{x^2}{2p} = \varphi$$

schneiden sich im Punkt P mit den Koordinaten $x = y = 2p$. Gesucht ist der Schwerpunkt des (linsenförmigen) gemeinschaftlichen Flächenstücks beider Kurven. Man erhält

$$U = \int_0^{2p} \left\{\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right\} dx = \frac{4}{3}p^2 \qquad \text{(nach 1)}$$

$$\mathrm{M\,x} = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left\{2\,p\,x - \frac{x^4}{4\,p^2}\right\}dx = \frac{6}{5}\,p^3 \qquad \text{(nach 3)}$$

$$\mathrm{M\,y} = \int_0^{2p} x\left(\sqrt{2\,p\,x} - \frac{x^2}{2\,p}\right)dx = \frac{6}{5}\,p^3; \qquad \text{(nach 2)}$$

daher ist

$$\xi = \eta = \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{U}} = \frac{6}{5}\,p^3 : \frac{4}{3}\,p^2 = \frac{9}{10}\,p.$$

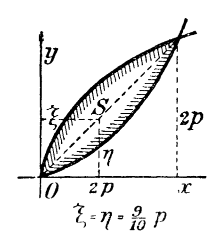


Fig 68.

2. Dem Schwerpunkt der halben gemeinschaftlichen Fläche AOP der beiden Kreise $f = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $\varphi = y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ zu bestimmen.

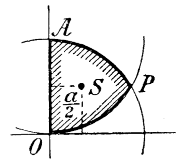


Fig. 69.

Man erhält nach vorstehenden Formeln

$$\mathrm{U} = \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\left\{2\sqrt{a^2 - x^2} - a\right\}dx = \frac{a^2}{12}\left(4\,\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

$$My = \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} x\left\{2\sqrt{a^2 - x^2} - a\right\} dx = \frac{5\,a^3}{24}$$

$$Mx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \left\{2\,a\sqrt{a^2 - x^2} - a^2\right\} dx = \frac{a^3}{24}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Daher ist

$$\xi = \frac{My}{U} = \frac{5\,a}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}, \quad \eta = \frac{Mx}{U} = \frac{a}{2}.$$

§ 43. Schwerpunkt von räumlichen Gebilden.

Schneiden die Ebenen $x = x$ und $x + dx$ aus der Fläche f eine Scheibe vom Inhalt $U\,dx$ aus, dann ist $x\,U\,dx$ das Moment dieser Scheibe in Bezug auf die yz-Ebene und $\int_b^a x\,U\,dx$ die Summe der Momente sämtlicher Scheiben von $x = b$ bis $x = a$ oder das Moment des ganzen Körpers in Bezug auf die yz-Ebene. Ist daher ξ die Schwerpunktsabscisse des Körpers, so muss

$$\xi \int_b^a U\,dx = \int_b^a x\,U\,dx$$

sein, woraus sich ergiebt

$$\xi = \frac{\int_b^a x\,U\,dx}{\int_b^a U\,dx}. \qquad (1)$$

Satz: Die Schwerpunktsabscisse ξ eines räumlichen Gebildes ist ausgedrückt durch das bestimmte Integral (1).

Dreht sich beispielsweise die ebene Kurve $z = f(x)$ in der zx-Ebene um die x-Axe, so beschreibt sie einen Rotationskörper, für welchen $U = \pi z^2 = \pi f^2(x)$ ist.

Der Schwerpunkt desselben hat von der yz-Ebene die Entfernung

$$\xi = \frac{\int\limits_b^a x f^2(x)\,dx}{\int\limits_b^a f^2(x)\,dx}. \qquad (2)$$

Beispiel:

1. In § 33, Beispiel 1, ist für das Paraboloid

$$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

$U = \pi bc x$, daher hat der Schwerpunkt desselben von der yz-Ebene die Entfernung

$$\xi = \frac{\pi bc \int\limits_0^a x^2\,dx}{\pi bc \int\limits_0^a x\,dx} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2}{3}a.$$

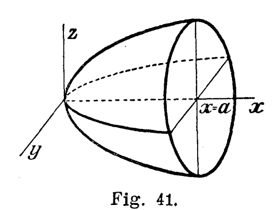


Fig. 41.

2. Die schleifenförmige Kurve $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ erzeugt bei der Drehung um die x-Axe einen Rotationskörper, dessen Schwerpunkt von der yz-Ebene die Entfernung hat

$$\xi = \frac{\int_0^a x\, y^2\, dx}{\int_0^a y^2\, dx} = \frac{\int_0^a (a^2 x^3 - x^5)\, dx}{\int_0^a (a^2 x^2 - x^4)\, dx} = \frac{5}{8}\, a\,.$$

§ 44. **Erste Guldinische Regel.**

Gegeben sei die Kurve $y = f(x)$ in der xy-Ebene. Dreht sich dieselbe um die x-Axe, so beschreibt beispielsweise der Punkt P mit der Ordinate y einen Kreis, dessen Inhalt

$$U = \pi\, y^2 = \pi\, f^2(x) \tag{1}$$

ist. Der Inhalt des auf diese Weise erzeugten Rotationskörpers zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$ ist alsdann nach § 34

$$V = \int_b^a U\, dx = \pi \int_b^a y^2\, dx = 2\,\pi \int_b^a \frac{y^2}{2}\, dx. \tag{2}$$

Nun ist nach § 39 $\frac{1}{2}\int_b^a y^2\, dx$ das Moment der Fläche DABC in Bezug auf die x-Axe. Ist daher η die Ordinate des Schwerpunkts dieser Figur (Meridian-

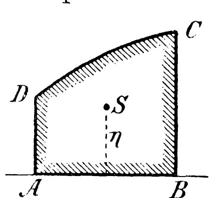


Fig. 70.

fläche genannt), deren Inhalt F sei, so ist nach § 39

$$\eta\, F = M\, x = \frac{1}{2} \int_b^a y^2\, dx, \tag{3}$$

daher ist

$$V = 2\pi \int_b^a \frac{y^2}{2} dx = 2\pi M x = 2\pi\eta F, \qquad (4)$$

d. h. es gilt der

Satz: Der Rauminhalt eines Rotationskörpers, der durch Drehung einer Figur — Meridianfigur — um eine in ihrer Ebene liegende Axe erzeugt wird, ist gleich dem In-

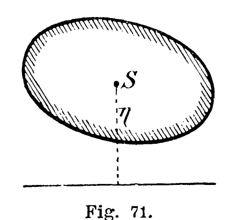


Fig. 71.

halt dieser Figur (hier DABC) multipliziert mit dem Weg $2\pi\eta$, den ihr Schwerpunkt bei der Drehung beschreibt.

Dieser Satz heisst „die erste Guldinische Regel" und gilt für jede beliebige Figur, welche Umgrenzung dieselbe auch haben möge.

Sind in Formel (4) V und F bekannt, so lässt sich hieraus die Ordinate η des Schwerpunkts der Meridianfigur berechnen:

$$\eta = \frac{V}{2\pi F}. \qquad (3)$$

In vielen Fällen ist diese Art der Ermittlung des Schwerpunkts ebener Figuren sehr einfach. Siehe Beispiel 4.

Beispiele:

1. Ist die Meridianfigur ein gleichseitiges Dreieck

von der Seite a, das um eine Seite gedreht werde, so ist

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},\quad \eta = \frac{a}{6}\sqrt{3},\ \text{daher}$$

$$V = \frac{\pi}{4}a^3.$$

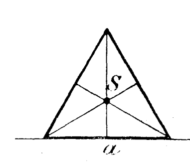


Fig. 72.

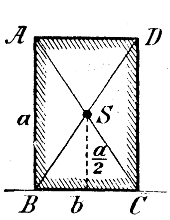


Fig. 73.

2. Rauminhalt des von dem Rechteck ABCD bei der Drehung um die Seite $BC = b$ beschriebenen Wulstes

$$V = a\,b\,.\,2\pi\frac{a}{2} = \pi a^2 b.$$

3. Bei der Drehung um die Bahnlinie beschreibt nach § 34 ein Zweig der Cykloide

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),\quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

eine Rotationsfläche vom Inhalt

$$V = \pi\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos\varphi)^3\,d\varphi$$

$$= 16\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2} = 5\pi^2 a^3.$$

Nun ist nach § 41, 3 die Schwerpunktsordinate des gedrehten Zweigs $\eta = \frac{5}{6}a$ und dessen Flächeninhalt nach § $27_{,10}$ $U_{2\pi} = 3\pi a^2$; daher ist auch nach der Guldinischen Regel

$$V = 2\pi\eta . U x = 2\pi . \frac{5}{6} a . 3\pi a^2 = 5\pi^2 a^3.$$

4. Dreht sich ein Halbkreis vom Inhalt $U = \frac{\pi}{2} a^2$ um seinen Durchmesser, so beschreibt er eine Kugelfläche vom Inhalt $V = \frac{4}{3} \pi a^3$, daher ist nach Formel (3) die Entfernung des Schwerpunkts der Halbkreisfläche vom zugehörigen Durchmesser

$$\eta = \frac{V}{2\pi F} = \frac{4a}{3\pi}.$$

5. Ebenso ist für den Kreisquadranten (Fig. 66)

$$\xi = \eta = \frac{V}{2\pi F} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{2\pi . \frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

§ 45. **Zweite Guldinische Regel.**

Nach § 36 beschreibt der Zweig AB der Kurve $y = f(x)$ bei der Drehung um die x-Axe einen Rotations-

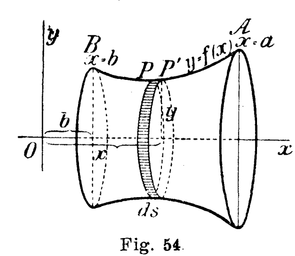


Fig. 54.

körper, dessen Oberfläche angegeben ist durch

$$O = 2 \int_b^a y \, ds. \qquad (1)$$

Nun ist nach § 40 $y\,ds$ das Moment des Elements ds in Bezug auf die **x-Axe**. Das Integral $\int_b^a y\,ds$ giebt die Summe aller dieser Momente von $x = b$ bis $x = a$ an, die nach § 40 gleich $\eta \int_b^a ds$ ist, wo η die Schwerpunktsordinate des Bogens AB und $\int_b^a ds = s$ die Länge desselben bezeichnet. Es ist daher

$$O = 2\pi \int_b^a y\,ds = 2\pi\eta \int_b^a ds \text{ oder } O = 2\pi\eta s, \quad (2)$$

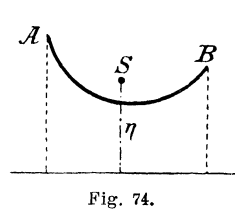


Fig. 74.

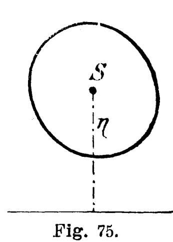


Fig. 75.

d. h. die bei der Drehung um die x-Axe von dem Bogen AB beschriebene Fläche ist gleich der Länge s dieses Bogens mal dem Weg seines Schwerpunkts.

Dieser Satz gilt stets, ob der Bogen AB eine geschlossene Figur darstellt oder nicht, ob er gesetzmässig krummlinig oder unregelmässig gestaltet ist. Er repräsentiert die zweite Guldinische Regel:

Eine geschlossene ebene Kurve beschreibt bei der Drehung um eine ausserhalb des Umfangs in ihrer Ebene liegende Axe einen Flächeninhalt gleich 2π mal dem Moment der

Kurve in Beziehung auf die Drehaxe oder gleich dem Produkt aus Umfang der Meridianfigur und Weg ihres Umfangschwerpunkts.

Aus Formel (2) folgt

$$\eta = \frac{O}{2\pi s}.$$

Die zweite Guldinische Regel kann also auch analog der ersten zu Schwerpunktsbestimmungen von Kurvenbögen benützt werden. Siehe Beispiel 3 und 4.

Beispiel:

1. In § 40 ergaben sich als Koordinaten des Schwerpunkts des Viertelkreisbogens $\xi = \eta = \frac{2a}{\pi}$. Da dessen Länge $s = \frac{\pi}{2} a$ ist, so beschreibt derselbe bei der Drehung um eine Axe die Fläche

$$O = 2\pi\eta s = 2\pi\xi s = 2\pi . \frac{2a}{\pi} . \frac{\pi}{2} a = 2\pi a^2,$$

was bekanntlich der Flächeninhalt einer Halbkugel ist.

2. Für den Cycloidenbogen ist nach § 27_{10} bezw. § 40

$$S = 8a \text{ bezw. } \xi = \pi a, \ \eta = \frac{4}{3} a.$$

Eine Schleife der Cycloide beschreibt daher bei der Drehung um die Scheiteltangente, bezw. die Bahnlinie einen Rotationskörper, dessen Oberfläche angegeben ist durch

$$O = 2\pi\xi . S = 16\pi^2 a^2, \text{ bezw. } O = 2\pi\eta S = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

3. Dreht sich ein Halbkreis vom Radius a und der Länge $s = \pi a$ um seinen Durchmesser, so beschreibt

er eine Kugel, deren Oberfläche $O = 4a^2$ ist. Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens hat daher vom Durchmesser die Entfernung

$$\eta = \frac{O}{2\pi s} = \frac{2a}{\pi}.$$

Fig. 76.

4. Dreht sich ein **Kreisquadrant** um einen Halbmesser, so beschreibt der zugehörige Bogen von der Länge $s = \frac{\pi}{2}a$ eine Halbkugel, deren Oberfläche $O = 2\pi a^2$ ist. Der Schwerpunkt S eines Viertelkreisbogens hat daher von den beiden äusseren Halbmessern die Entfernungen (vergl. § 40 No. 1)

$$\xi = \eta = \frac{O}{2\pi s} = \frac{2a}{\pi}.$$

IX. Abschnitt.

Das Doppelintegral und seine Anwendung.

§ 46. Das unbestimmte Doppelintegral.

1. Wie man eine Funktion $x = F(x)$ zwei- oder mehrfach nach x ableiten kann und dabei erhält

$$\frac{dy}{dx} = y' = F'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = F''(x) = f(x),$$

so ergiebt sich auch umgekehrt durch Integration

$$\frac{dy}{dx} = y' = \int F''(x)\,dx + C_1 = \int f(x)\,dx + C_1$$

und hieraus durch weitere Integration

$$y = \int \left\{ \int F''(x)\,dx + C_1 \right\} dx + C_2$$
$$= \int\int f(x)\,dx\,dx + C_1 x + C_2 = F(x, C_1, C_2),$$

wo C_1 und C_2 die Integrationskonstanten bezeichnen, die zunächst beliebig gewählt werden können.

Erklärung. Unter dem zweifachen Integral des Differentials $f(x)\,dx\,dx$ versteht man eine Funktion $F(x, C_1, C_2)$ von x, welche zweimal nach x abgeleitet f (x) giebt

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = f(x).$$

2. Enthält die Funktion $f(xy)$ zwei Veränderliche x und y, die unabhängig voneinander sein sollen, so versteht man unter dem zweifachen Integral

$$V = \int\int f(xy)\,dx\,dy = F(xy)$$

eine Funktion $F(xy)$, welche nach x und y abgeleitet $f(xy)$ liefert

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = f(xy) = \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial y}}{\partial x}.$$

Hieraus folgt beispielsweise

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int f(xy)\,dy,$$

wo rechts dy an Stelle von ∂y gesetzt ist. Erhält man bei der Ausführung dieses Integrals, wobei x als Konstante anzusehen ist,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int f(xy)\,dy = G(xy) + g(x),$$

wo $g(x)$ eine willkürliche Funktion von x allein oder eine Konstante sein kann, so folgt hieraus durch weitere Integration

$$F = \int\int f(xy)\,dx\,dy = \int G(xy)\,dx + \int g(x)\,dx + \psi(y),$$

wo bei der Integration y als konstant anzusehen ist und $\psi(y)$ von y allein abhängt oder eine Konstante bedeutet. Führt das Integral $\int G(xy)\,dx$ auf $H(xy)$ und $\int g(x)\,dx$ auf $\varphi(x)$, so ist das unbestimmte Doppelintegral allgemein dargestellt durch

$$F(xy) = \int\left\{\int f(xy)\,dy\right\}dx = H(xy) + \varphi(x) + \psi(y).$$

Dasselbe enthält demnach an Stelle der Konstanten zwei willkürliche Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$.

§ 47. Das bestimmte Doppelintegral und seine geometrische Bedeutung.

In der xy-Ebene liege ein Viereck ABCD, dessen Seiten durch $x = x$, $x = a$, $y = y$, $y = b$ bestimmt sind.

Alsdann sei $z = f(xy)$ eine Funktion von x und y, welche für alle Punkte jenes Vierecks, sowie im Innern desselben eindeutig und stetig ist.

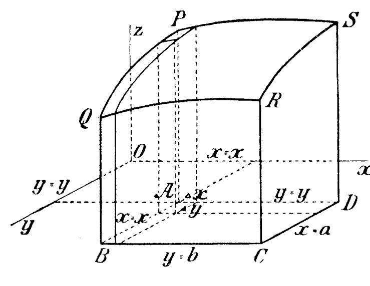


Fig. 77.

Es soll der Rauminhalt V bestimmt werden, der von der Fläche $z = f(xy)$, den Ebenen $x = x$, $x = a$; $y = y$, $y = b$ und der xy-Ebene begrenzt ist.

Teilt man $AD = a - x$ in m gleiche Teile von der Länge $\triangle x = \frac{a-x}{m}$ und ebenso $AB = b - y$ in n gleiche Teile von der Länge $\triangle y = \frac{b-y}{n}$ und legt durch die Teilpunkte Ebenen parallel zur yz-Ebene, bezw. parallel zur zx-Ebene, so wird der Raum V in mn Säulchen zerschnitten, welche näherungsweise als Prismen von der Grundfläche

$$\triangle x \triangle y = \frac{a-x}{m} \cdot \frac{b-y}{n}$$

und den Höhen

$$z_{kh} = f(x + k \triangle x,\ y + h \triangle y),$$

wo $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$ ist, betrachtet werden können. Durch Addition dieser mn Prismen ergiebt sich für V näherungsweise der Ausdruck

$$\begin{aligned} V_{mn} = \triangle x \triangle y \{ & f(x y) + f(x + \triangle x, y) + f(x, y + \triangle y) \\ & + f(x + 2 \triangle x, y) + f(x + \triangle x, y + \triangle y) \\ & + f(x, y + 2 \triangle y) \} + \ldots \\ & + f\{x + (m-1) \triangle x,\ y\} + \ldots \\ & + f\{x,\ y + (n-1) \triangle y\}, \end{aligned}$$

der dem wahren Wert V um so näher kommt, je grösser m und n gewählt werden. Beim Uebergang zur Grenze ist

$$\lim_{m=\infty,\ n=\infty} V_{mn} = V. \qquad (2)$$

Um diesen Grenzwert zu erhalten, entwickle man in (1) jede der Funktionen $f(x + k \triangle x,\ y + h \triangle y)$ nach Potenzen und Produkten von $\triangle x$ und $\triangle y$ und setze

$$\triangle x = \frac{a-x}{m}, \quad \triangle y = \frac{b-y}{n},$$

dann ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise wie in § 69 der Differentialrechnung für $\lim V_{mn}$ die Reihenentwicklung

$$\lim V_{mn} = (a-x)(b-y)\Big[f(xy) + \frac{1}{2!}\Big\{(a-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (b-y)\frac{\partial f}{\partial y}\Big\} + \frac{1}{3!}\Big\{(a-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(a-x)(b-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (b-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big\} + \cdots\Big] \quad (3)$$

wodurch der Rauminhalt V ermittelt ist.

Satz: Der Rauminhalt V, der von der Fläche $z = f(xy)$, den vier Ebenen $x = x$, $x = a$, $y = y$, $y = b$ und der xy-Ebene begrenzt ist, lässt sich durch eine konvergente Potenzreihe von der Form (3) darstellen, deren Grenzwert V ist.

Setzt man hierin $x = 0$, $y = 0$, so erhält man den

Satz: Der Rauminhalt V, der von der Fläche $z = f(xy)$, den Ebenen $x = a$ und $y = b$ sowie den drei Koordinatenebenen begrenzt ist, ist angegeben durch die Reihe

$$V = ab\Big\{f(xy) + \frac{1}{2!}\Big(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) + \cdots\Big\}_{x=0,\ y=0.} \quad (4)$$

Beispiel:

Ist $z = f(xy) = Ax^2 + By^2$ die Gleichung eines Paraboloids, welches die xy-Ebene im Ursprung berührt, so ist der Rauminhalt, der von dieser Fläche, den Ebenen $x = a$, $y = b$ und den Koordinatenebenen begrenzt ist, angegeben durch

$$V = \frac{a\,b}{3!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\} = \frac{a\,b}{3}\left\{A\,a^2 + B\,b^2\right\}.$$

Setzt man nach $c = A\,a^2 + B\,b^2$, so ist

$$V = \frac{a\,b\,c}{3}.$$

2. Denken wir uns in $z = f(x\,y)$ die Variable $x = x$ konstant, so hat in Fig. 77 die Fläche $P\,A\,B\,Q$ den Inhalt

$$U_1 = \int_{y=y}^{b} f(x,\, y)\,dy. \qquad (5)$$

Legt man nun parallel zu dieser Fläche in der Entfernung dx eine weitere Ebene, so schneiden dieselben aus dem Raum V eine Scheibe aus, deren Rauminhalt bis auf eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung durch

$$u_1\,dx = \left\{\int_{y}^{b} f(x,\, y)\,dy\right\} dx$$

angegeben ist. Der Inhalt aller dieser Scheiben $u_1\, u_2\, u_3 \ldots$, die von $x = x$ bis $x = a$ durch Ebenen parallel zur yz-Ebene in der Entfernung dx voneinander gelegt werden können, ist angegeben durch das Doppelintegral

$$V = \int_{x}^{a}\left\{\int_{y}^{b} f(x,\, y)\,dy\right\} dx,$$

wo bei der letzten Integration y und b als Konstante angesehen werden können.

Da man zu dem gleichen Resultat gelangen muss, wenn man den Raum V durch Ebenen parallel zur zx-Ebene zerlegt und die erhaltenen Scheiben summiert, so folgt:

$$V = \int_{x}^{a}\left\{\int_{y}^{b} f(x\,y)\,dy\right\} dx = \int_{y}^{b}\left\{\int_{x}^{a} f(x,\, y)\,dx\right\} dy, \qquad (5)$$

wo bei der Integration nach x, bezw. y, dy und y, bezw. dx und x als konstant anzunehmen sind.

Ergiebt sich bei der folgenden Integration

$$\int f(x\,y)\,dy = G(x, y) + C,$$

wo x als konstant gedacht ist, so ist das bestimmte Integral (5) angegeben durch

$$u_1 = \int_y^b f(x, y)\,dy = G(x, b) - G(x, y).$$

Hieraus folgt weiter durch Integration nach x

$$V = \int_x^a \left\{ \int_y^b f(x, y)\,dy \right\} dx = \int_x^a G(x, b)\,dx - \int_x^a G(x, y)\,dx.$$

Die beiden Integrale rechts sind offenbar von derselben Form und können durch Vertauschung von b und y in einander übergeführt werden. Erhält man

$$\int G(x, y)\,dx = F(x, y) + C,$$

so ist

$$\int_x^a G(x, y)\,dx = F(a, y) - F(x, y),$$

und wenn man hierin b mit y vertauscht

$$\int_y^b G(x, b)\,dx = F(a, b) - F(x, b).$$

Das Doppelintegral V zwischen den Grenzen a, x und b, y ist somit dargestellt durch

$$V = \int_x^a \int_y^b f(x, y)\,dx\,dy = F(a, b) - F(a, y) - F(x, b) + F(x, y). \tag{6}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung giebt zu erkennen, dass sich das Integral nicht ändert, wenn man a mit x und gleichzeitig b mit y vertauscht.

Satz: Ein Doppelintegral bleibt seinem Werte nach ungeändert, wenn man die oberen Grenzen mit den unteren vertauscht.

Der Wert des Doppelintegrals geht jedoch in den entgegengesetzten über, sobald man nur die Grenzen eines Integrals miteinander vertauscht.

3. Es erübrigt noch zu zeigen, dass die Entwicklung (3) von Lim V_{mn} mit dem Doppelintegral (5) bezw. (6) übereinstimmt.

Nach der Definition des Doppelintegrals ist

$$f = (x y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \qquad (7)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y}, \ldots \qquad (7')$$

Entwickelt man alsdann $F(x+k,\ y+h)$ nach Potenzen und Produkten von k und h, ebenso $F(x+k, y)$, $F(x,\ y+h)$ nach Potenzen von k, bezw. h und setzt nachträglich $k = a - x$, $h = b - y$, so folgt:

$$F(a, b) = F(x y) + (a - x) \frac{\partial F}{\partial x} + (b - y) \frac{\partial F}{\partial y}$$
$$+ \frac{1}{2!} \left\{ (a - x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 (a - x)(b - y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right.$$
$$\left. + (b - y)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right\} + \ldots$$
$$-F(a,y) = -F(x y) - (a - x) \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2!} (a - x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \ldots$$
$$-F(x,b) = -F(x y) - (b - y) \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2!} (b - y)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \ldots$$
$$F(x y) = \quad F(x y).$$

Nach Addition dieser Gleichungen und Berücksichtigung von (7) und (7′) ergiebt sich unmittelbar

$$F(a, b) - F(a, y) - F(x, b) + F(x, y) = \lim V_{mn} \text{ oder}$$

$$\lim V_{mn} = V = \int_x^a \int_y^b f(x\,y)\,dx\,dy,$$

womit die Uebereinstimmung der Reihenentwicklung (3) mit dem Wert des bestimmten Doppelintegrals (6) gezeigt ist.

§ 48. Doppelintegrale mit veränderlichen Grenzen.

In der xy-Ebene liege eine krumme Linie, welche die Gleichung $y = \varphi(x)$ besitzen und die x-Axe im Punkte $x = a$, die y-Axe im Punkt $y = b$ beschneiden möge. Ferner sei gegeben die Fläche $z = f(x\,y)$, welche für alle Punkte des Kurvenbogens AB oder innerhalb

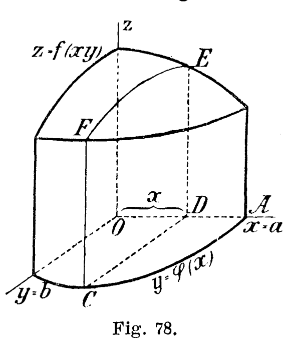


Fig. 78.

der Figur OAB eindeutig und endlich sei. Sodann werde über OAB als Basis ein senkrechter Cylinder konstruiert, dessen obere Begrenzungsfläche von der Fläche $z = f(x\,y)$ gebildet werde und dessen Inhalt V sei. Legt man alsdann in der Entfernung $OD = X$ eine Ebene parallel zur yz-Ebene, so ist der Inhalt der Fläche CDEF angegeben durch das Integral

$$\mathrm{CDEF} = \int_0^y f(x\,y)\,dy,$$

wo x als konstant zu betrachten ist. Legt man alsdann parallel zu dieser Ebene eine zweite Ebene in der Entfernung $x + dx$ von der yz-Ebene, so schneiden beide Ebenen aus dem Raum V eine Scheibe aus, deren Inhalt bis auf eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung richtig angegeben ist durch

$$\mathrm{Ux} = \left\{ \int_0^y f(x\,y)\,dy \right\} dx. \qquad (1)$$

Durch Summation aller derartigen Scheiben von $x = 0$ bis $x = a$ ergiebt sich alsdann der Inhalt V, der nunmehr ausgedrückt ist durch das Doppelintegral

$$V = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=\varphi(x)} f(x\,y)\,dy \right\} dx. \qquad (2)$$

Legt man Ebenen parallel zur zx-Ebene, so lässt sich V auch berechnen durch

$$V = \int_0^b \left\{ \int_0^{x=\psi(y)} f(x\,y)\,dx \right\} dy. \qquad (3)$$

Satz: Der Rauminhalt V, der von der Cylinderfläche $y = \varphi(x)$ (oder $x = \psi(y)$, der xy-Ebene, der Fläche $z = f(x\,y)$ begrenzt wird, ist angegeben durch jedes der beiden Doppelintegrale (2) oder (3).

Beispiele:

1. Um den Rauminhalt eines Oktanten des dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zu berechnen, hat man

$$z = f(x\,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

und in der xy-Ebene die Kurve

$$y = \varphi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

daher ist

$$V = \frac{c}{b}\int_0^a \left\{ \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\,dy \right\} dx.$$

Für das innere Integral, in welchem x konstant anzusehen ist, erhält man den Ausdruck

$$\int \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2} + \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

der nach Einführung der Grenzen übergeht in

$$\frac{\pi b^2}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

daher ist

$$V = \frac{\pi b c}{4}\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi a b c}{6}.$$

Das Gesamtvolumen des Ellipsoids ist daher

$$8\,V = \frac{4}{3}\pi a b c.$$

§ 49. Tangentenebene, Normale einer Fläche. Oberflächenberechnung mit Doppelintegralen.

1. Es sei $z = f(x\,y)$ die Gleichung einer krummen Fläche und $P(x\,y\,z)$ ein Punkt derselben. Dann hat bekanntlich eine beliebige Ebene durch denselben die Gleichung

$$\zeta - z = m(\xi - x) + n(\eta - y), \qquad (1)$$

wo ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bezeichnen. Legt man nun durch P (x y z) die beiden Ebenen $\eta = y$ und $\xi = x$ parallel zur zx-Ebene und yz-Ebene, so schneiden dieselben aus der Fläche f zwei ebene Kurven heraus, deren Tangenten die Gleichungen haben:

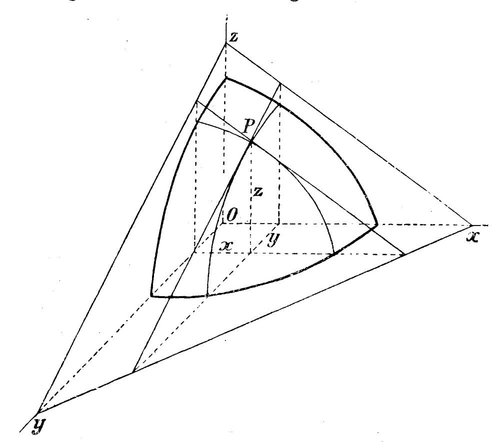


Fig. 79.

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) \text{ bezw. } \zeta - z = \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y). \quad (2)$$

Diese liegen in der Ebene (1), wenn die Bedingungen erfüllt sind

$$\frac{\partial z}{\partial x} = m, \; \frac{\partial z}{\partial y} = n. \qquad (3)$$

Die Ebene (1) geht damit in die Tangentialebene oder Tangentenebene der Fläche $z = f(x\,y)$ im Punkt P (x y z) über und erhält die Gleichung

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \qquad (4)$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

gesetzt ist.

Erklärung. Jede durch den Punkt P in der Ebene (4) gezogene Gerade heisst Tangente der Fläche $z = f(x y)$ und die Ebene (4) selbst Tangentenebene oder Tangentialebene derselben

Erklärung. Eine im Punkte P auf der Ebene (4) senkrechte Gerade heisst Normale der Fläche $z = f(x y)$.

Die Normale im Punkt $P(x y z)$ hat die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{1}. \tag{5}$$

Macht dieselbe mit der xy-Ebene den Winkel γ, so ist

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{6}$$

2. Um die Oberfläche U desjenigen Teils der Fläche $z = f(x y)$ zu berechnen, welches oberhalb der stark ge-

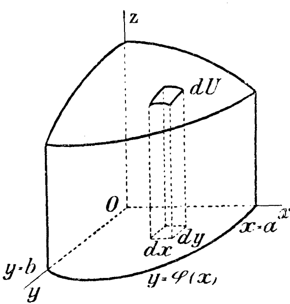


Fig. 80.

zeichneten Kurve $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ in der xy-Ebene liegt, teile man die letztere durch Ebenen parallel zur

yz- und zx-Ebene in unendlich kleine Rechtecke dx dy. Das über einem solchen liegende Element d U der Fläche $z = f(xy)$ kann ohne Fehler als eben und in der Tangentenebene liegend angesehen werden. Ist alsdann γ der Neigungswinkel desselben gegen die xy-Ebene, so ist

$$dx\,dy = dU \cos\gamma \text{ oder}$$

$$dU = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Da nun γ auch der Winkel ist, den die Flächennormale mit der xy-Ebene macht, so ist

$$dU = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

woraus sich U in Form eines Doppelintegrals berechnen lässt.

Satz: Der Flächeninhalt U ist dargestellt durch jedes der beiden Doppelintegrale:

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=\varphi(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy \right\} dx, \text{ oder}$$

$$U = \int_0^b \left\{ \int_0^{x=\psi(y)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx \right\} dy.$$

Beispiele:

Die Oberfläche eines Kugeloktanten zu berechnen.

Die Gleichung der Kugel sei

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

dann ist

$$z = f(xy) = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\; y = \varphi(x) = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\; q = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$U = a\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \right\} dx.$$

Das innere Integral ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Bigg|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Nach Eintragung der Grenzen geht alsdann U über in

$$U = a \frac{\pi}{2} \int_0^a dx = \frac{\pi}{2} a^2.$$

Die ganze Kugel hat daher die Oberfläche

$$O = 8\, U = 4 \pi a^2.$$

§ 50. Anwendung von Polarkoordinaten.

Eine zur z-Axe parallel laufende Cylinderfläche habe in Polarkoordinaten die Gleichung $r = f(\varphi)$ und werde nach oben durch die Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzt.

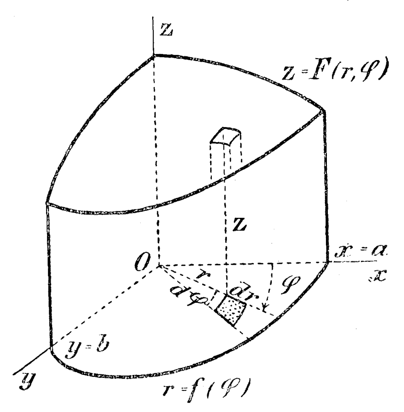


Fig. 81.

Es ist der Rauminhalt dieser Cylinderfläche und der Inhalt ihrer oberen Begrenzungsfläche zu bestimmen.

Das in der Figur 81 schraffierte Element der xy-Ebene hat in Polarkoordinaten den Inhalt $r\, d\varphi\, dr$

und demgemäss das zugehörige Element des Cylinders den Rauminhalt

$$dV = z\,r\,d\varphi\,dr = F(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Daher ist das von dem zu $r = f(\varphi)$ gehörigen Cylinder, der xy-Ebene und der Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzte Volumen ausgedrückt durch

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{f(\varphi)} F(r, \varphi)\,r\,dr \right\} d\varphi. \qquad (1)$$

Satz: Das von der xy-Ebene, der Cylinderfläche $r = f(\varphi)$ und der krummen Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzte Volumen ist dargestellt durch das Doppelintegral (1).

Bezeichnen wir wieder wie im vorigen Paragraphen das über dem schraffierten Element $r\,d\varphi\,dr$ der xy-Ebene liegende Element der Fläche F mit dU, so ist ebenso wie dort

$$dU = \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\gamma},$$

wo γ den Neigungswinkel der zu dU gehörigen Normalen der Fläche $F(r, \varphi)$ bezeichnet. Die Oberfläche U selbst ist somit ausgedrückt durch

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{f(\varphi)} \frac{r\,dr}{\cos\gamma} \right\} d\varphi. \qquad (2)$$

Satz: Das über der Cylinderfläche $r = f(\varphi)$ liegende Stück der krummen Fläche $z = F(r, \varphi)$ hat den Inhalt U, der durch das Doppelintegral (2) ausgedrückt ist.

Beispiele.

1. Inhalt und Oberfläche der Kugel zu berechnen. Liegt der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung 0, so hat sie die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

und schneidet die xy-Ebene nach einem Kreis, dessen Gleichung $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ist. Führt man Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein, so ist

$$z = F(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad r = f(\varphi) = a.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2}V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \,.\, r\,dr \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3}\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

und

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Nun ist

$$z = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \text{ daher}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

und demnach

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + p^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Nach Formel (2) ist somit

$$\frac{U}{2} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \frac{a\,r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} a^2\,d\varphi = 2\pi a^2$$

und

$$U = 4\pi a^2.$$

2. Inhalt und Scheitelfläche des Körpers zu berechnen, der von der xy-Ebene, der Kegelfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und der Cylinderfläche

$$y^2 - ax + x^2 = 0$$

begrenzt wird.

Führt man Polarkoordinaten ein, so findet man

$$z = F(r, \varphi) = \frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{c\,r}{a}, \quad r = f(\varphi) = a\cos\varphi.$$

Daher ist nach Formel (1)

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{a\cos\varphi} \frac{c}{a}\, r \,.\, r\, dr \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c\, a^2 \cos^3\varphi\, d\psi$$

$$= \frac{2}{3}\, c\, a^2 \text{ und}$$

$$V = \frac{4}{3}\, c\, a^2.$$

Ferner ist

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a}\cos\varphi, \quad q = \frac{c}{a}\sin\varphi, \text{ somit}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

daher ergiebt sich nach Formel (2) für die halbe Scheitelfläche

$$\frac{U}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{a\cos\varphi} \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\, r\, dr \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

oder

$$\frac{U}{2} = \frac{\pi}{8}\, a\sqrt{a^2+c^2}, \quad \text{also } U = \frac{\pi}{4}\, g\sqrt{a^2+c^2}.$$

X. Abschnitt.

Exkurs auf das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 51. Die verschiedenen Arten von Differentialgleichungen.

1. Erklärung. Eine Gleichung, welche Veränderliche und deren Differentiale zugleich enthält, heisst eine Differentialgleichung.

Tritt in derselben nur eine unabhängige Veränderliche auf, so heisst die Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung.

So ist beispielsweise

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ oder } \varphi(x, y, y') = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung;

$$\varphi(x, y, y', y'') = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung;

: : :

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Die Gleichung

$$\frac{d^3 y}{d x^3} - 6 \frac{d^2 y}{d x^2} + 11 \frac{d y}{d x} - 6 y = 0$$

repräsentiert eine gewöhnliche (lineare) Differentialgleichung dritter Ordnung.

2. Ist die Zahl der abhängigen Veränderlichen grösser als 1, so erhält man gewöhnlich auch ein System von simultanen Differentialgleichungen.

Sind y und z Funktionen von x, so stellen die beiden Gleichungen

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}, y, \frac{dz}{dx}, z, x\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{dy}{dx}, y, \frac{dz}{dx}, z, x\right) = 0$$

ein simultanes System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen x dar, die man beispielsweise erhält, indem man die beiden Gleichungen einer Raumkurve nach x differentiiert.

3. Erklärung. Sind die Veränderlichen Funktionen von mehreren unabhängigen, so heisst die Gleichung eine partielle oder eine totale (oder auch exakte) Differentialgleichung, je nachdem die partiellen Ableitungen oder die totalen Differentiale der Veränderlichen, welche als unabhängige zu betrachten sind, auftreten.

§ 52. Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen.

Erklärung. Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varphi(x y y') = \varphi\left(x y \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1)$$

integrieren, heisst eine Funktion $F(x y C) = 0$ suchen, welche nach x differentiiert, wieder auf die Differentialgleichung (1) führt.

Da bei der Integration eine Konstante C auftritt, so erhält man gewöhnlich nicht nur eine einzige Lösung sondern ein System von Integralkurven

$$F(x y C) = 0,$$

die zusammen die allgemeine Lösung oder das allgemeine Integral ausmachen.

Jedem speziellen Wert von C entspricht eine Lösung, die man als partikuläre Lösung bezeichnet.

Da $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ die trigonometrische Tangente des Winkels α ist, den die Kurventangente im Punkt P (x y) mit der Abscissenaxe macht, so ist durch die Differentialgleichung (1) jedem Punkt der Lösungskurven die in demselben stattfindende Fortschreitungsrichtung zugeordnet.

Es sei gegeben die Differentialgleichung

$$f(x\,y\,y') = 0$$

und gesucht die allgemeine Lösung $F(x\,y\,C) = 0$. Durch Differentiation erhält man hieraus

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \quad \text{oder} \quad M\,dx + N\,dy = 0,$$

womit die allgemeine Gestalt einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung illustriert ist.

Erklärung. Sind hierin M und N nur Funktionen von x, bezw. y, ist die Gleichung also von der Form

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0,$$

so heisst die Differentialgleichung eine solche mit separierten Veränderlichen.

Satz: Eine Differentialgleichung erster Ordnung mit separierten Veränderlichen hat als allgemeine Lösung

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy + C = 0,$$

wie sich direkt durch Integration ergiebt.

Die Trennung (Separation) der Veränderlichen lässt sich häufig ohne Schwierigkeiten bewerkstelligen, wie die folgenden Beispiele zeigen.



Beispiele:

1. Die Kurve zu bestimmen, deren Subtangente stets gleich der zugehörigen Abscisse ist.

Nach § 57 des ersten Bändchens ergiebt sich als Differentialgleichung

$$\frac{y}{y'} = x \text{ oder } \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$ly - lx = lc \text{ oder } y = cx,$$

wo c die Integrationskonstante ist. D. h. jede gerade Linie durch den Ursprung hat die geforderte Eigenschaft.

2. Für welche Kurve ist die Subtangente gleich dem n^{ten} Teil der zugehörigen Abscisse?

Die gewöhnliche Differentialgleichung lautet

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{n} \text{ oder } \frac{dy}{y} - n\frac{dx}{x} = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus als allgemeine Lösung

$$ly - nlx = lc \text{ oder } y = cx^n.$$

Die gesuchte Kurve ist somit eine parabolische mit $y = 0$ als Tangente im Ursprung.

3. Die Kurven zu bestimmen, deren Subtangente gleich a ist.

Man erhält als Differentialgleichung

$$\frac{y}{y'} = a \text{ oder } \frac{dy}{y} - \frac{dx}{a} = 0.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$ly - \frac{x}{a} = lc \text{ oder } ly - lc = \frac{x}{a} \text{ oder}$$

$$y = ce^{\frac{x}{a}}.$$

Satz. Für ein System von Exponentialkurven ist die Subtangente konstant. (Vergl. Bd. I, pag. 129.)

4. Für welche Kurve ist die Subnormale konstant gleich a?

Nach § 57 des ersten Bändchens ist die Subnormale $S_n = yy'$, daher lautet die gegebene Differentialgleichung

$$yy' = a \quad \text{oder} \quad y\,dy - a\,dx = 0.$$

Hieraus folgt direkt durch Integration

$$\frac{y^2}{2} - ax + C = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 - 2ax + C = 0.$$

Satz. Die Parabel ist also die einzige Kurve, deren Subnormale konstant ist. (Vergl. Bd. I, pag. 129.)

5. Für welche Kurve ist die Fläche zwischen der Kurve, der Abscissenaxe und der Ordinate zum Punkt P (x y) gleich

$$\frac{n}{m+n}\,x\,y^2.$$

Man erhält als Bedingungsgleichung

$$\int_0^x y\,dx = \frac{n}{m+n}\,x\,y$$

und hieraus durch Differentiation nach x

$$y\,dx = \frac{n}{m+n}(x\,dy + y\,dx) \quad \text{oder} \quad n\frac{dy}{y} - m\frac{dx}{x} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$n\,l\,y - m\,l\,x = l\,c \quad \text{oder} \quad y^n = c\,x^m,$$

d. h. die parabolischen Kurven haben die verlangte Eigenschaft. Siehe § 27.

Aus den vorstehenden Beispielen folgt der

Satz. Lassen sich in einer Differentialgleichung erster Ordnung die Variabeln trennen, so kann man die allgemeine Lösung unmittelbar durch zwei Integrationen (Quadraturen) herstellen.

§ 53. Homogene Differentialgleichungen.

Es fragt sich nun, ob sich nicht auch Differentialgleichungen erster Ordnung mit nicht separierten Veränderlichen vielleicht durch Substitution auf solche mit separierten Veränderlichen zurückführen lassen.

Dies ist in der That für die homogenen Differentialgleichungen der Fall.

Erklärung. Eine homogene Differentialgleichung $M(xy)\,dx + N(xy)\,dy = 0$ ist eine solche, in welcher M und N homogene Funktionen gleichen Grads von x und y sind.

In diesem Fall lässt sich die Gleichung auf die Form bringen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(xy)}{N(xy)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man hierin $y = xz$, so folgt hieraus durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = \varphi(z)$$

und hieraus die neue Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z},$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Durch Integration ergiebt sich schliesslich hieraus

$$lx = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C = F(z) + C = F\left(\frac{y}{x}\right) + C.$$

Beispiele.

1. Für welche Kurve ist die Subtangente stets gleich $y - ax$, wo x und y die Koordinaten des Berührungspunkts bezeichnen?

Man erhält für die Subtangente den Ausdruck

$$\frac{y}{y'} = y - ax$$

und hieraus als Differentialgleichung

$$y\,dx = (y - ax)\,dy,$$

die zu der eben behandelten Klasse gehört. Setzt man $y = zx$, so folgt hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - ax} = x\frac{dz}{dx} + z$$

oder nach Substitution von $y = zx$ die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{(z - a)\,dz}{z - z^2 + az} = -\frac{a\,dz}{z(a+1)} - \frac{dz}{(a+1)(z - a - 1)}$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Durch Integration erhält man

$$lx = -\frac{1}{a+1}\left\{a\,lz + l(z - a - 1)\right\} + lC \text{ oder}$$

$$x^{a+1} z^a (z - a - 1) = C \text{ oder}$$

$$y^a (y - ax - x) - C = 0.$$

2. Für welche Kurve ist das Lot vom Ursprung auf die Tangente gleich der Abscisse x des Berührungspunkts?

Man erhält als Differentialgleichung

$$(y^2 - x^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$$

Da dieselbe homogen ist, so setze man $y = zx$, $y' = z'x + z$, dann folgt aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = x\frac{dz}{dx} + z = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{2z\,dz}{z^2+1} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Durch Integration ergiebt sich hieraus

$$lx + l(z^2+1) = lc \text{ oder } x(z^2+1) = c \text{ oder}$$
$$x^2 + y^2 - cx = 0.$$

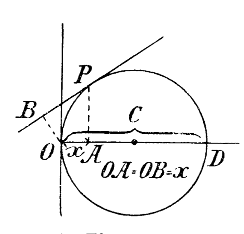


Fig. 82.

Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der x-Axe liegt und der die y-Axe im Ursprung berührt, hat somit die Eigenschaft, dass das Lot vom Ursprung auf die Tangente gleich der Abscisse des Berührungspunktes ist.

3. Durch dieselbe Substitution lassen sich auf Gleichungen von der Form integrieren

$$y' + P(x)\,y + Q(x) = 0. \qquad (1)$$

Setzt man nämlich $y = \varphi(x)\,z$, wo φ eine Funktion von x allein sein soll, so folgt hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\frac{dz}{dx} + z\,\frac{d\varphi}{dx},$$

womit (1) übergeht in

$$\varphi\frac{dz}{dx} + z\left\{\frac{d\varphi}{dx} + P\,.\,\varphi\right\} + Q = 0. \qquad (2)$$

Da nun φ willkürlich ist, so kann man diese Funktion so bestimmen, dass

$$\frac{d\varphi}{dx} + P \cdot \varphi = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt nun

$$\frac{d\varphi}{\varphi} + P\,dx = 0$$

und nach Integration dieser Gleichung

$$l\varphi + \int P\,dx = 0 \text{ oder } \varphi = e^{-\int P\,dx}.$$

Aus (2) folgt weiter

$$dz = -\frac{Q}{\varphi}dx,\ z = -\int \frac{Q}{\varphi}dx + C = -\int Q\,e^{\int P\,dx}dx + C$$

und mit Berücksichtigung von $y = \varphi z$ endlich

$$y = e^{-\int P\,dx}\left\{C - \int Q\,e^{\int P\,dx}dx\right\}.$$

Beispiele:

1. Es sei $y' - y + x = 0$, dann ist $P = -1$, $Q = x$, somit

$$\varphi = e^x \text{ und } y = e^x\left\{C - \int x\,e^{-x}\,dx\right\}.$$

Nun ist $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x}$, daher ergiebt sich als gesuchtes Integral

$$y = C\,e^x + x + 1.$$

2. Für welche Kurve ist $y' = \frac{y-x}{x}$?

Bringt man diese Differentialgleichung auf die Form (1)

$$y' - \frac{y}{x} + 1 = 0,$$

so ist

$$P = -\frac{1}{x},\ Q = 1,$$

daher ist

$$\varphi = e^{lx} = x \text{ und}$$
$$y = x\left\{C - \int \frac{dx}{x}\right\} = x\left\{C - lx\right\}.$$

§ 54. **Vollständige Differentialgleichungen.**

1. Erklärung. Es sei

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Differentialgleichung, in welcher P und Q Funktionen von x und y sein sollen. Dieselbe wird eine exakte oder vollständige (auch totale) Differentialgleichung — und der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ ein vollkommenes Differential — genannt, wenn sie durch Differentiation einer Funktion $f(x\,y) = C$ entstanden ist. Alsdann ist die Gleichung (1) identisch mit der folgenden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0 \qquad (2)$$

und heisst $f(x\,y) = C$, das vollständige Integral derselben. Vergleicht man die Gleichungen (1) und (2) miteinander, so folgt

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

und hieraus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (3)$$

Dies ist die Bedingung, dass (1) eine vollständige Differentialgleichung ist.

Satz. Das Differential (2) ist das totale Differential einer Funktion f, sobald die Bedingung erfüllt ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (4)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so setze man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \text{ und integriere } f = \int P \, \partial x,$$

wobei das in P enthaltene y zunächst noch als konstant angesehen werden kann. Da nun in der zu addierenden Konstanten noch eine Funktion $\varphi(y)$ von y enthalten sein kann, so ist diese noch zu dem erhaltenen Integral hinzuzufügen

$$f = \int P \, \partial x + \varphi(y).$$

Der Wert von φ wird ermittelt, indem man dieses Integral wieder differentiiert und das Resultat mit der gegebenen Differentialgleichung $dz = P\,dx + Q\,dy$ vergleicht.

Beispiel.

Für die Differentialgleichung

$$dz = (3x^2 - ay - y^2)\,dx + (-ax + 2by - 2xy)\,dy$$

ist die Bedingung (3) erfüllt; daher stellt dz das totale Differential einer Funktion $f(xy) = f$ dar, die man aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - ay - y^2$$

ermitteln kann, indem man unter Voraussetzung eines konstanten y bildet

$$z = f = \int (3x^2 - ay - y^2)\,\partial x + \varphi(y) =$$
$$= x^3 - axy - xy^2 + \varphi(y).$$

Bildet man das totale Differential dieser Funktion

$$dz = (3x^2 - ay - y^2)\,dx + \left(-ax - 2xy + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy$$

und vergleicht dasselbe mit der gegebenen Differentialgleichung, so folgt $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2by$ und hieraus

$$\varphi = \int 2by\,\partial y + C = by^2 + C.$$

Das gesuchte Integral lautet daher

$$z = x^3 - axy - xy^2 + by^2 + C.$$

2. Ist jedoch für das Differential

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (4)$$

die Bedingung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nicht erfüllt, so ist (4) auch kein vollkommenes oder exaktes Differential.

In diesem Fall multipliziere man die Gleichung (4) mit dem Faktor μ, der eine Funktion von x oder y oder von beiden oder auch eine Konstante sein kann,

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0, \qquad (5)$$

dann lässt sich dieser Faktor stets so bestimmen, dass die Bedingung erfüllt ist

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (6)$$

und damit (5) ein exaktes Differential wird.

Erklärung. Die Funktion $\mu(xy)$, mit der man die Differentialgleichung (4) multiplizieren muss, damit deren linke Seite ein exaktes Differential wird, heisst der **integrierende Faktor** oder auch der **Euler'sche Multiplikator**.

Betrachtet man beispielsweise

a) $\frac{x^2}{y} = C$ oder b) $\frac{y}{x^2} = C$ oder c) $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x^2} = C$

als vollständiges Integral, so erhält man hieraus durch Differentiation bezw. als zugehörige vollkommene Differentialgleichung

b) $\frac{1}{x^3}(x\,dy - 2y\,dx) = 0$, b) $-\frac{x}{y^2}(x\,dy - 2y\,dx) = 0$,

c) $\frac{x}{x^4 + y^2}(x\,dy - 2y\,dx) = 0.$

Für die Gleichung

$$x\,dy - 2y\,dx = 0$$

ist daher die Bedingung (3) nicht erfüllt. Sie wird aber zu einer vollkommenen Differentialgleichung, wenn man sie mit einem der (integrierenden) Faktoren $\frac{1}{x^3}$ oder $-\frac{x}{y^2}$ oder $\frac{x}{x^4+y^2}$ multipliziert. Wir erhalten somit die Sätze:

Satz. Jede Differentialgleichung von der Form (4) besitzt einen integrierenden Faktor, durch dessen Zusatz die linke Seite derselben zu einem vollkommenen Differential wird.

Satz. Es giebt nicht nur einen, sondern unendlich viele integrierende Faktoren.

Satz. Kennt man zwei verschiedene integrierende Faktoren μ_1 und μ_2, so ist der Quotient $\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$ das vollständige Integral der Differentialgleichung.

Für das obige Beispiel ist $\mu_1 = \frac{1}{x^3}$, $\mu_2 = -\frac{x}{y^2}$,

$$\mu_3 = \frac{x}{x^4+y^2},$$

daher $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{y^2}{x^4} = C$ oder $\frac{y}{x^2} = C_1$;

$$\frac{\mu_1}{\mu_3} = \frac{x^4+y^2}{x^4} = 1 + \frac{y^2}{x^4} = C \text{ oder } \frac{y}{x^2} = C_1;$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_3} = -\frac{x^4+y^2}{y^2} = -\frac{x^4}{y^2} - 1 = C \text{ oder } \frac{x^4}{y^2} = C_1$$

$$\text{oder } \frac{y}{x^2} = C_2.$$

3. Zur Bestimmung des integrierenden Faktors dient folgende Betrachtung. Da nach Voraussetzung die linke Seite von (5) ein vollkommenes Differential ist, so folgt

$$\frac{\partial(\mu\,\mathrm{M})}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial(\mu\,\mathrm{N})}{\partial \mathrm{x}} \text{ oder}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}\right) = \mathrm{N}\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{y}} - \mathrm{M}\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{y}} = 0 \qquad (7)$$

als Bestimmungsgleichung für μ. Da dies eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, so ist die Bestimmung von μ aus derselben gewöhnlich schwieriger als die Integration der gegebenen Gleichung selbst. Zur Integration der letzteren genügt aber irgend eine Lösung von (4), und es ist häufig möglich, eine solche zu ermitteln. Insbesondere ist dies der Fall, wenn sich μ als eine Funktion von x oder von y allein bestimmen lässt.

Ist beispielsweise μ nur von x abhängig, so ist $\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{y}} = 0$, womit die Gleichung (7) übergeht in

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}\right) = \mathrm{X}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\mathrm{l}\,\mu = \int \mathrm{X}\,\partial \mathrm{x} + (\mathrm{C}), \quad \mu = e^{\int \mathrm{X}\,\partial \mathrm{x}}.$$

Satz. Der integrierende Faktor μ lässt sich als eine Funktion von x allein ansehen, wenn $\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}\right)$ eine Funktion von x allein ist. Setzt man diese gleich X, so ist $\mu = e^{\int \mathrm{X}\,\partial \mathrm{x}}$.

Beispiel.

Für obige Differentialgleichung $x\,dy - 2y\,dx = 0$ ist $M = -2y$, $N = x$, daher $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$$= X = -\frac{3}{x} \text{ und}$$

$$l\mu = -3\int \frac{dx}{x} = -3\,l\,x = l\,\frac{1}{x^3} \text{ oder } \mu = \frac{1}{x^3}.$$

§ 55. Partikuläre und singuläre Lösungen.

1. Erklärung. Jedem Wert der Konstanten C ($C = 0, 1, 2, \ldots C_1, C_2, \ldots$) in der allgemeinen Lösung $F(x\,y\,C) = 0$ der Differentialgleichung $\varphi(x\,y\,y') = 0$ entspricht eine Lösung, die man als Partikularlösung oder als partikuläres Integral bezeichnet.

Ausser den unendlich vielen Lösungen, welche den wechselnden Werten von C entsprechen, kann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung noch eine singuläre Lösung besitzen, welche dadurch charakterisiert ist,

1) dass sie sich nicht durch partikularisierende Konstante bilden lässt;
2) dass sie im allgemeinen ohne jede Integration durch reine Eliminationsprozesse ermittelt werden kann.

Geometrisch stellt die singuläre Lösung eine Kurve dar, welche von den partikulären Kurven umhüllt wird.

Bekanntlich hat das Tangentenpaar, das man vom Punkt $P(\xi\,\eta)$ an den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ziehen kann, die Gleichung

$$(x\xi + y\eta - r^2)^2 - (x^2 + y^2 - r^2)(\xi^2 + \eta^2 - r^2) = 0,$$

wo mit x, y die laufenden Koordinaten bezeichnet sind.

Setzt man hierin $\xi = x + dx$, $\eta = y + dy$, so hat das Tangentenpaar mit dem Kreis zwei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam, d. h. die Verbindungslinie von $P(xy)$ mit $P(x+dx,\ y+dy)$ ist Tangente an den Kreis, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ der Gleichung genügt

$$(y\,dx - x\,dy)^2 - r^2(dx^2 + dy^2) = 0,$$

die auch geschrieben werden kann

$$\varphi(xy,\ p) \equiv y^2 - r^2 - 2xyp + (x^2 - r^2)p^2 = 0. \quad (*)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grads, deren partikuläre Lösungen durch die unendlich vielen Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ angegeben sind. Die Umhüllungslinie dieser Tangenten oder der Kreis selbst repräsentiert ihre singuläre Lösung.

2. Herleitung des singulären Integrals aus dem allgemeinen Integral.

Die gegebene Differentialgleichung $\varphi(xyy') = 0$ besitze die allgemeine Lösung $F(xyC) = 0$.

Nimmt man hierin an, C sei eine Funktion von x, dann erhält man durch Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = 0.$$

Bestimmt man nun C so, dass $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ ist, oder wenn man sich diese Gleichung nach C aufgelöst denkt, dass $C = f(x)$ ist, so ist

$$F\{xy,\ f(x)\} = 0$$

das gesuchte singuläre Integral von $\varphi(xyy') = 0$.

Wird C als Funktion von x und y betrachtet, so folgt durch Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial C} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \cdot y' \right\} = 0.$$

Hierin lässt sich nun C ebenfalls so bestimmen, dass $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ ist. Folgt hieraus $C = f(x\,y)$, so ist

$$F\left\{x\,y,\ f(x\,y)\right\} = 0$$

die singuläre Lösung von $\varphi(x\,y\,y') = 0$.

Die Ableitung y′ berechnet sich alsdann aus

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\, y' = 0,$$

falls C nicht so bestimmt ist, dass gleichzeitig

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wird.

Satz. Das singuläre Integral $\Phi(x\,y) = 0$ der Differentialgleichung $\varphi(x\,y\,y') = 0$ enthält keine partikularisierende Konstante und ergiebt sich immer durch Elimination von C aus

$$F(x\,y\,C) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Hieraus geht auch hervor, dass $\Phi(x\,y) = 0$ die Umhüllungslinie der Kurven des Systems $F(x\,y\,C) = 0$ ist. Vergleiche hierüber § 68 der Differentialrechnung.

Sind x y die laufenden Koordinaten, so ist

$$\xi\,x + \eta\,y - r^2 = 0$$

die Gleichung der Tangente im Punkt $\xi\,\eta$ an den Kreis $\xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0$. Setzt man nun $\xi = \sqrt{r^2 - \eta^2}$ und nachträglich $\eta = C$, so hat die Tangentenschar, welche die allgemeine Lösung der Differentialgleichung darstellt, die Gleichung

$$F(x\,y\,C) = y\,C + x\sqrt{r^2 - C^2} - r^2 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0 = y - \frac{C x}{\sqrt{r^2 - C^2}} \text{ oder } C = \frac{r y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

somit ist

$$F\left(x\,y, \frac{r y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{r y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\sqrt{r^2 - \frac{r^2 y^2}{x^2+y^2}} - r^2 = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

die singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung (*), wie zu erwarten war.

3. Herleitung des singulären Integrals aus der Differentialgleichung.

Wie aus den obigen Betrachtungen hervorgeht, ist die singuläre Kurve als Umhüllungslinie der partikulären Kurven anzusehen. Dieselbe kann somit auch als der geometrische Ort des Schnittpunkts zweier konsekutiver Partikulärkurven ermittelt werden. In zwei derselben schneiden sich im allgemeinen in einem Punkt, in welchem sich zwei verschiedene Tangenten an die beiden Kurven ziehen lassen. Soll die singuläre Kurve durch denselben hindurchgehen, so müssen die beiden Partikulärkurven unendlich wenig von einander abweichen und die beiden Tangenten ihres Schnittpunkts zusammenfallen. Dies ist aber der Fall, wenn neben

$$\varphi(x\,y\,p) = 0 \text{ auch noch } \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

ist. Erhält man aus der letzten Gleichung $p = \psi(x\,y)$, so stellt

$$\varphi(x\,y,\ \psi) = 0$$

die singuläre Lösung der Differentialgleichung dar.

Satz. Die singuläre Lösung der Differentialgleichung $\varphi(x\,y,\ p) = 0$ ergiebt sich stets durch

Elimination von $p = y' = \frac{dy}{dx}$ aus

$$\varphi(x\,y,\ p) = 0 \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Durch partielle Ableitung der Differentialgleichung (*) folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -2xy + 2(x^2 - r^2)p = 0 \text{ und hieraus } p = \frac{xy}{x^2 - r^2}.$$

Substituiert man diesen Wert in $\varphi(x\,y,\ p) = 0$, so ergiebt sich auch hier als singuläre Lösung der Kreis

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

wie es sein soll.

Anmerkung. Sind M und N rationale Funktionen von x und y, so hat, wie leicht zu erkennen ist, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grads $M\,dx + N\,dy = 0$ keine singuläre Lösung.

§ 56. Differentialgleichungen erster Ordnung n^{ten} Grades.

Erklärung. Eine Differentialgleichung erster Ordnung n^{ten} Grades ist von der Form

$$(y')^n + f_1 (y')^{n-1} + \ldots + f_n = 0, \qquad (1)$$

wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Funktionen von x und y oder auch konstante Zahlen sein können.

Bei der Integration einer solchen kommen hauptsächlich zwei Methoden in Betracht.

a) Die Methode der Zerlegung ist anwendbar, wenn sich die Differentialgleichung (1) nach $\frac{dy}{dx} = y'$ auflösen lässt. Die auf diesem Wege resultierenden Wurzeln der Gleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = g_1(x\,y), \quad \frac{dy}{dx} = g_2(x\,y), \ldots, \frac{dy}{dx} = g_n(x\,y) \quad (2)$$

stellen n lineare Differentialgleichungen erster Ordnung dar, welche sich nach den Methoden der vorigen Paragraphen auflösen lassen. Ergeben sich hierbei die Integrale

$$\varphi_1(x\,y\,c_1) = 0, \; \varphi_2(x\,y\,c_2) = 0, \; \ldots, \; \varphi_n(x\,y\,c_n) = 0,$$

so ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) dargestellt durch

$$\varphi_1(x\,y\,c_1) \,.\, \varphi_2(x\,y\,c_2) \ldots \varphi_n(x\,y\,c_n) = 0, \qquad (3)$$

worin

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = C$$

gesetzt werden darf, ohne dass die Allgemeinheit der Lösung dadurch beeinträchtigt wird.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) ist somit angegeben durch

$$F(x\,y\,C) \equiv \varphi_1(x\,y\,C)\,\varphi_2(x\,y\,C) \ldots \varphi_n(x\,y\,C) = 0. \quad (4)$$

Beispiele.

1. Für welche Kurve ist das Quadrat der Subtangente gleich dem Rechteck aus den Koordinaten des zugehörigen Kurvenpunkts?

Nach § 57 der Differentialrechnung ist die Subtangente ausgedrückt durch $\frac{y}{y'}$, daher erhalten wir als Differentialgleichung eine solche vom zweiten Grad

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 = x\,y \text{ oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y}{x}}$$

und

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} \mp \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0,$$

welche die beiden Integrale giebt

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1, \quad \sqrt{y} + \sqrt{x} = C_2.$$

Das allgemeine Integral ist daher dargestellt durch

$$F(x\,y\,C) \equiv \left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - C\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - C\right) = 0$$

oder
$$(x - y)^2 - 2\,C\,(x + y) + C^2 = 0.$$

2. Für welche Kurve ist das Quadrat der Subnormale $y\,y'$ gleich dem Rechteck aus den Koordinaten des zugehörigen Kurvenpunkts?

Man erhält als Differentialgleichung

$$y^2\,y'^2 = x\,y \text{ oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x}{y} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{x}{y}},$$

welche die beiden Lösungen giebt:

$$y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = C_1,\; y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = C_2.$$

Die allgemeine Lösung ist daher

$$F(x\,y\,C) \equiv (x^3 - y^3)^2 - 2\,C\,(x^3 + y^3) + C^2 = 0.$$

b) Die Methode der wiederholten Differentiation wird zur Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1) benützt, wenn sich dieselbe leicht nach y oder x auflösen lässt.

Giebt dieselbe nach y aufgelöst die Gleichung

$$y = f(x,\ p),\ \text{wo}\ p = \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

gesetzt ist, so folgt hieraus durch Ableitung nach x

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}, \tag{6}$$

d. h. eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades zwischen x und p von der Form

$$\varphi\left(x\,p,\ \frac{dp}{dx}\right) = 0. \tag{6)*}$$

Führt dieselbe auf das Integral

$$J\,(x,\ p,\ C) = 0, \tag{7}$$

so ergiebt sich durch Elimination von p aus dieser Gleichung und der gegebenen Gleichung (5), das gesuchte allgemeine Integral der Differentialgleichung (1)

$$F(x\,y\,C) = 0. \tag{8}$$

Lässt sich andererseits die Differentialgleichung (1) nach x auflösen und somit auf die Form bringen

$$x = f(y,\ p), \tag{9}$$

so folgt hieraus durch Differentiation nach x

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \text{ oder da}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \text{ ist,}$$

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Man erhält also auch auf diesem Wege eine lineare Differentialgleichung zwischen y und p von der Form

$$\varphi\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy}\right) = 0, \tag{10}$$

welche das Integral

$$J(y\,p\,C) = 0$$

geben möge. Durch Elimination von p aus dieser Gleichung und der gegebenen Differentialgleichung erhält man ebenfalls das allgemeine Integral

$$F(x\,y\,C) = 0.$$

c) Ist die Differentialgleichung von der (Clairaut'schen) Form

$$y = x\,p + \varphi(p), \tag{11}$$

so folgt hieraus durch Differentiation

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \text{ oder}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0. \tag{12}$$

Der erste Faktor gleich Null gesetzt $\frac{dp}{dx} = 0$ giebt integriert $p = C$ und demgemäss als allgemeines Integral

$$y = xC + \varphi(C). \qquad (13)$$

Setzt man den zweiten Faktor gleich Null

$$x + \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \qquad (14)$$

so lässt sich hieraus und aus (11) p eliminieren. Man erhält alsdann eine Lösung der Differentialgleichung (11), welche keine Konstante enthält und als singuläre Lösung derselben zu bezeichnen ist.

Satz: Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (11) ist von der Form

$$y = xC + \varphi(C)$$

und kann unmittelbar angeschrieben werden.

Die singuläre Lösung derselben erhält man durch Elimination von p aus

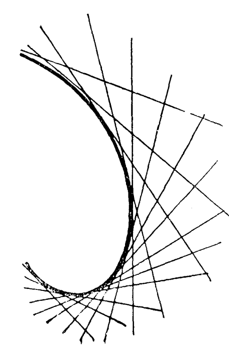


Fig. 83.

$$x + \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \text{ und } y = xp + \varphi(p).$$

Geometrisch stellt das allgemeine Integral (13) eine Schar von Geraden (partikuläre Lösungen) dar, welche eine Kurve umhüllen, welche durch das singuläre Integral ausgedrückt ist.

Beispiele.

1. Eine Gerade schneidet von den Axen zwei Stücke ab, deren Summe, Differenz, Produkt und Quotient konstant gleich a ist. Welches sind die Kurven, die von dieser Geraden umhüllt werden?

Nehmen wir an, die umhüllende Gerade berühre die gesuchte Kurve im Punkt $P(xy)$, so hat sie als Tangente an dieselbe die Gleichung

$$\eta - y = p(\xi - x).$$

Für $\eta = 0$, bezw. $\xi = 0$ ergeben sich hieraus als Axenabschnitte: $\frac{1}{p}(px - y)$ bezw. $y - px$. Daher erhalten wir die Differentialgleichungen

a) für die Summe:

$$y = xp - \frac{ap}{1-p}, \quad y = xC - \frac{aC}{1-C},$$

b) für die Differenz:

$$y = xp - \frac{ap}{1+p}, \quad y = xC - \frac{aC}{1+C},$$

c) für das Produkt:

$$y = xp + a\sqrt{-p}, \quad y = xC + a\sqrt{-C},$$

d) für den Quotienten:

$$ap = -1, \qquad ay + x = C.$$

Dieselben sind von der Clairaut'schen Form und erhalten daher die nebenstehenden allgemeinen Lösungen.

Die singulären Lösungen obiger Differentialgleichungen sind in den beiden ersten Fällen angegeben durch

a) $(x-y)^2-2a(x+y)+a^2=0,$

b) $(x+y)^2-2a(x-y)+a^2=0,$

und stellen gewöhnliche Parabeln dar, die symmetrisch zu den beiden Medianen m und n liegen (Fig. 84) und die Koordinatenaxen in den Punkten (a, 0), (0, a), (0, — a) berühren. Im dritten Fall ergiebt sich als singuläre Lösung die gleichseitige Hyperbel

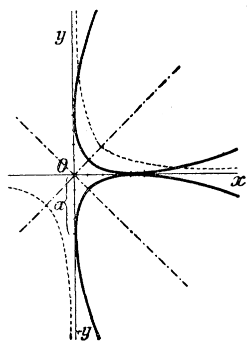


Fig. 84.

c) $4xy-a^2=0,$

die in der Figur punktiert gezeichnet ist.

Die Differentialgleichung d) ist linear und besitzt daher keine singuläre Lösung.

2. Der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel beständig auf einer Geraden gleitet und dessen anderer Schenkel durch einen festen Punkt geht, umhüllt eine Parabel.



3. Eine Strecke von konstanter Länge a gleite beständig mit ihren Endpunkten auf den Koordinatenaxen hin. Welche Kurve wird hierbei umhüllt?

Man erhält als Differentialgleichung der Geradenschar

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

und als zugehörige singuläre Lösung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Dies ist die Gleichung der Asteroide.

§ 57. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

mögen hier auch noch kurz berührt werden, weil sie in der Mechanik eine wichtige Rolle spielen.

a) Eine solche ist von der Form

$$f(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Sie enthält neben der ersten Ableitung y', wodurch für jeden Punkt $P(xy)$ der Ebene eine gewisse Fortschreitungsrichtung bestimmt ist, noch die zweite Ableitung y'', wodurch demselben ausserdem noch die Krümmung der Lösungskurven in dem betreffenden Punkt zugeordnet ist. Näherungsweise ergiebt sich als geometrische Lösung ein Kreisbogenpolygon, das im Grenzfall in die Lösungskurve übergeht.

Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält zwei willkürliche Konstanten.

Wie schon im ersten Bändchen § 70 u. ff. ausgeführt worden ist, ist die Bewegung eines Punkts in einer Geraden angegeben durch eine Differentialgleichung von der Form

$$x'' = \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, t), \qquad (2)$$

wo x den zur Zeit t zurückgelegten Weg und x'' die erlangte Beschleunigung bezeichnet. Wir unterscheiden hierbei drei Fälle.

1. Die Beschleunigung kann konstant sein. Dann ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = C A \text{ oder } \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = A \text{ oder}$$
$$d x' = A\, dt.$$

Durch Integration folgt hieraus als erstes Integral mit einer Konstanten C_1

$$x' = \frac{dx}{dt} = A t + C_1$$

und durch weitere Integration als zweites Integral mit zwei Konstanten C_1, C_2:

$$x = \frac{1}{2} A t^2 + C_1 t + C_2,$$

wodurch einerseits die Geschwindigkeit, andererseits der Weg in Funktion der Zeit ausgedrückt ist.

Für $A = g = 9{,}81$ erhält man die Formeln des freien Falls, wie sie in Bändchen I, § 71, aufgestellt worden sind.

2. Die Beschleunigung kann nur abhängig von der Zeit sein. Dann ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) \text{ oder } d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f(t)\, dt.$$

Hieraus erhält man durch Integration unmittelbar die beiden Integrale

$$x' = \frac{dx}{dt} = \int f(t)\, dt + C_1$$

$$x = \int \left\{ \int f(t)\, dt + C_1 \right\} dt + C_2.$$

3. Die Beschleunigung kann nur von der Entfernung x des bewegten Punkts abhängen. Dann ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} dt = f(x)\, dx, \text{ oder } x'\, dx' = f(x)\, dx.$$

Durch Integration folgt hieraus als erstes Integral

$$\frac{x'^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int f(x)\, dx + C_1,$$

woraus sich die Geschwindigkeit des bewegten Punkts berechnet

$$x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2 \int f(x)\, dx + C_1} = W.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$dt = \frac{dx}{W}$$

als zweites Integral

$$t = \int \frac{dx}{W} + C_2,$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Bei kleinen Schwingungen ergiebt sich beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x,$$

deren Integrale auf die Form gebracht werden können:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{a^2 - k^2 x^2}, \quad x = \frac{a}{k} \sin(k b - t),$$

wo a und b die Integrationskonstanten bezeichneten.

b) Durch ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

ist, wie schon im Bändchen I ausgeführt worden, die Bewegung eines Punkts in der Ebene bestimmt. Nach Bändchen I, § 73, ergaben sich für den schiefen Wurf die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g,$$

woraus unmittelbar durch Integration die vier Integrale

$$x' = \frac{dx}{dt} = C_1; \quad y' = \frac{dy}{dt} = -gt + C_2$$

$$x = C_1 t + C_3, \quad y = -\frac{1}{2} gt^2 + C_2 t + C_4$$

mit den Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 hervorgehen.

§ 58. **Planetenbewegung.**

a) Ein materieller Punkt P (Planet) von der Masse m bewege sich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz frei um die Sonne S, deren Masse M sei.

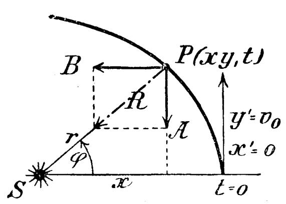


Fig. 85.

Der Einfachheit halber werde vorausgesetzt, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet und angenommen, dass bei Beginn derselben $(t = 0)$ der Punkt P die x-Axe mit der Geschwindigkeit v_0 passiere, die in diesem Augenblick parallel zur x-Axe gerichtet ist.

Nach Newton ist alsdann die Grösse der Kraft, mit welcher sich Planet und Sonne anziehen, ausgedrückt durch

$$R = k\frac{Mm}{r^2}. \qquad (1)$$

Befindet sich der materielle Punkt zur Zeit t im Punkt $P(xy)$, dessen Radiusvektor $r = PS$ mit der x-Axe den Winkel φ macht (Fig. 85), so gelten die dynamischen Differentialgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -PA = -R\cos\varphi$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -PB = -R\sin\varphi \text{ oder}$$

da $$\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r} \text{ ist,}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y}{r},$$

welche nach Division mit m übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -kM\frac{x}{r^3} \\ y'' &= -kM\frac{y}{r^3} \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

wobei noch die Gleichung besteht

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

b) Multipliziert man die Gleichungen (2) mit

$$2x' = 2\frac{dx}{dt} \text{ bezw. } 2y' = 2\frac{dy}{dt},$$

so ergiebt sich durch Addition

$$2x'x'' + 2y'y'' = -k\frac{M}{r^3}(2xx' + 2yy') \text{ oder}$$

$$\frac{d(x'^2+y'^2)}{dt} = -k\frac{M}{r^3}\frac{d(x^2+y^2)}{dt} \text{ oder}$$

$$d(x'^2+y'^2) = -2kM\frac{dr}{r^2}.$$

Durch Integration folgt hieraus als erstes Integral der Differentialgleichungen (2) das Prinzip der lebendigen Kraft

$$x'^2+y'^2 = 2k\frac{M}{r}+\Gamma \text{ oder} \tag{4}$$

$$v^2 = 2k\frac{M}{r}+\Gamma, \tag{4)*$$

worin sich die Konstante Γ durch die Bedingung ermitteln lässt, dass für $t=0$ $x'=0$, $y'=v_0$, $r=r_0$ ist.

c) Werden andererseits die Gleichungen (2) mit $-y$, bezw. x multipliziert und addiert, so folgt

$$xy''-yx''=0$$

und hieraus durch Integration als zweites Integral das Prinzip der Flächen

$$xy'-yx'=2U. \tag{5}$$

Da für $t=0$, $x=r_0$ die Geschwindigkeitskomponenten $x'=0$, $y'=v_0$ gegeben sind, so ergiebt sich hieraus

$$r_0 v_0 = 2U, \text{ also } U=\frac{r_0 v_0}{2},$$

womit U bestimmt ist.

Die Gleichung (5) kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}=2U \text{ oder } \frac{x(y+dy)-y(x+dx)}{dt}=2U.$$

Hierin ist bekanntlich durch $x(y+dy)-y(x+dx)$ das doppelte Flächenstück $2\,df$ dargestellt, welches der

Radiusvektor in der Zeit dt beschrieben hat. Daher ist auch

$$\frac{2\,df}{dt} = 2\,U \text{ oder } \frac{df}{dt} = 2\,U. \qquad (6)$$

Erklärung. Man bezeichnet

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}(x\,y' - y\,x')$$

als Flächengeschwindigkeit des Radiusvektors r. Daher gilt der

Satz: Bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne ist die Flächengeschwindigkeit konstant.

Durch Integration geht (6) über in

$$f = U\,t + C,$$

oder da $C = 0$ wird, in

$$f = U\,t. \qquad (7)$$

Wir erhalten somit den

Satz: Bei der Planetenbewegung sind die zurückgelegten Flächenräume proportional der Zeit oder

Das zweite Keppler'sche Gesetz: Der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

d) Um die Bahnkurve zu bestimmen, multipliziere man die Gleichungen (2) mit $2\,U = x\,y' - y\,x'$, dann erhalten wir

$$2\,U\,x'' = -\,k\,M\,\frac{x\,(x\,y' - y\,x')}{r^3} = -\,k\,M\,\frac{d\left(\frac{y}{r}\right)}{dt}$$

$$2\,U\,y'' = -\,k\,M\,\frac{y\,(x\,y' - y\,x')}{r^3} = +\,k\,M\,\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dt}$$

und hieraus durch Integration

$$\begin{aligned} 2\,U\,x' &= -\,k\,M\frac{y}{r} + B \quad \Big|\, -y \\ 2\,U\,y' &= +\,k\,M\frac{x}{r} + A \quad \Big|\, +x \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung der anfänglich gemachten Annahmen ergiebt sich hieraus $B = 0$, $A = r_0 v_0 - k M$.

Werden beide Gleichungen mit den angeschriebenen Faktoren multipliziert und addiert, so folgt als weiteres Integral die Gleichung:

$$2\,U\,(x\,y' - y\,x') = k\,M\,r + A\,x \quad \text{oder}$$

$$4\,U^2 = k\,M\,r + A\,r\cos\varphi \quad \text{oder}$$

$$r = \frac{4\,U^2}{k\,M + A\cos\varphi}, \tag{8}$$

die für

$$C = \frac{4\,U^2}{k\,M}, \quad \varepsilon = -\frac{A}{k\,M}$$

die Gestalt erhält

$$r = \frac{C}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

und bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten r, φ darstellt, bezogen auf einen Brennpunkt als Pol.

Je nachdem $\varepsilon = 0$, 1, < 1, > 1 ist, ist derselbe ein Kreis, eine Parabel, eine Ellipse, eine Hyperbel. Somit gilt der

Satz: Bewegt sich ein materieller Punkt P unter dem Einfluss der Anziehung eines festen materiellen Centrums S nach dem Newton'schen Gesetz, so beschreibt derselbe einen Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkt F sich S befindet.

Bei der Planetenbewegung ist die Bahnlinie eine Ellipse. Alsdann lässt sich dieser Satz auch aussprechen als Erstes Kepplersches Gesetz. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Hat diese Ellipse (Fig. 86) die grosse Axe a, die kleine Axe b und die lineare Excentricität ε, so folgt aus (8) für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$

$$a - \varepsilon = \frac{4\,U^2}{k\,M + A}, \quad a + \varepsilon = \frac{4\,U^2}{k\,M - A},$$

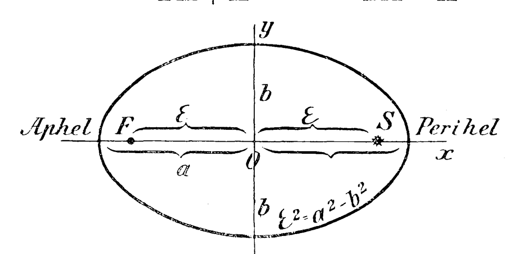


Fig. 86.

woraus sich ergiebt

$$a = \frac{4\,U^2\,k\,M}{k^2\,M^2 - A^2},$$

$$b = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} = \frac{4\,U}{\sqrt{k^2\,M^2 - A^2}} \qquad (9)$$

und hieraus

$$4\,a = k\,M\,b^2.$$

e) Nach Formel (7) ist

$$f = U\,t, \text{ also auch}$$

$$F = U\,T,$$

wenn F den Inhalt der ganzen Ellipse und T die Umlaufszeit bezeichnet. Es ist also auch

$$\pi\,a\,b = U\,T,$$

woraus folgt

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{U^2} = \frac{4\pi^2}{kM} a^3.$$

Für einen anderen Planeten mit der grossen Axe a_1 ist ebenso

$$T_1{}^2 = \frac{4\pi^2}{kM} a_1{}^3, \text{ also auch}$$

$$T^2 : T_1{}^2 = a^3 : a_1{}^3. \tag{10}$$

Hieraus folgt aber das

Dritte Keppler'sche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Axen ihrer Bahnen.

f) Führt man Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$$

ein, so ist

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi' \\ y' &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi' \\ \hline x'^2 + y'^2 &= r'^2 + r^2\varphi'^2 \\ x y' - y x' &= r^2\varphi', \end{aligned}$$

womit die beiden Prinzipien (4) und (5) in Polarkoordinaten die Gestalt erhalten:

$$\left.\begin{aligned} r'^2 + r^2\varphi'^2 &= 2k\frac{M}{r} + \Gamma \\ r^2\varphi' &= 2U \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Man erhält

$$r^2 r'^2 = 2kMr + r^2\Gamma$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{2kMr + r^2\Gamma} = \frac{1}{r} W$$

$$t = \int \frac{r\,dr}{W} = f(r). \tag{12}$$

Ferner ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\,U}{r^2}, \text{ also } d\varphi = \frac{2\,U}{r^2}\,dt = \frac{2\,U}{r^2} \cdot \frac{r\,dr}{W},$$

somit

$$\varphi = 2\,U \int \frac{dr}{r\,W} = g\,(r). \qquad (13)$$

Durch die Gleichung (12) lässt sich r in Funktion der Zeit ausdrücken. Die Gleichung (13) stellt die Bahnkurve dar. Damit sind sämtliche Integrale der Differentialgleichung (2) ermittelt.

g) Zieht man im Punkt P des Kegelschnitts, in welchem sich der materielle Punkt zur Zeit t befindet, die Tangente an die Bahnkurve, deren Neigungswinkel gegen die x-Axe ϑ sei, und fällt man vom Pol S das Lot SH auf dieselbe, so ist

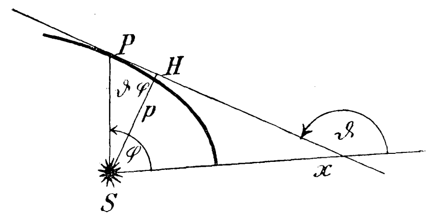


Fig. 87.

$$p = r \sin(\vartheta - \varphi) \text{ und}$$
$$x = r \cos\varphi, \;\; y = r \sin\varphi$$
$$x' = v_x = v \cos\vartheta, \;\; y' = v_y = v \sin\vartheta,$$

daher geht die Gleichung (5) über in

$$r\,v\,(\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta) = 2\,U \text{ oder in}$$
$$r\,v \sin(\vartheta - \varphi) = 2\,U, \text{ woraus folgt:}$$

$$v = \frac{2\,U}{r \sin(\vartheta - \varphi)} = \frac{2\,U}{p}. \qquad (14)$$

Es gilt damit der

Satz: Die Geschwindigkeit v, die ein Planet zu irgend einer Zeit erreicht, ist umgekehrt proportional mit dem Abstand der augenblicklichen Bahntangente von der Sonne.

Dieser Abstand ist am kleinsten zur Zeit des Perihels und am grössten zur Zeit des Aphels (Fig. 86). Daher ist auch die Geschwindigkeit der Planeten am grössten zur Zeit des Perihels und am kleinsten zur Zeit des Aphels.

Soeben beginnt in unsrem Verlage eine neue Publikation zu erscheinen, die den Namen

Sammlung Schubert

führt.

Der ungeahnte Aufschwung, den in den letzten Jahrzehnten Technik und Naturwissenschaften genommen haben, hat die naturgemässe Folge gehabt, dass sich von Jahr zu Jahr ein lebhafteres Interesse der

—— Mathematik ——

zugewendet hat. Wenngleich für jedes der einzelnen Gebiete der Mathematik Lehrbücher genug vorhanden sind, so fehlte es doch bisher an einem auf dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft und der Lehrmethode stehenden Lehrgange der gesamten Mathematik, welcher, einheitlich angelegt, in systematisch sich entwickelnden Einzel-Darstellungen alle Gebiete der Mathematik umfasste.

Dieser Umstand bewog uns, die „Sammlung Schubert“ ins Leben zu rufen, eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, die erstens wissenschaftlich angelegt sind, zweitens den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und drittens durch eine leichtfassliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichlfachmann verständlich sind. Die Form der Darstellung ist so gewählt, dass die einzelnen Bände in gleicher Weise für den Unterricht, wie für den Selbstunterricht, oder zur Repetition geeignet sind.

klar und ungetrübt wiederspiegle. **Dieser Forderung gerecht zu werden, hat Althof in meisterhafter Weise verstanden.**

Blätter f. d. bayr. Gymn.-Schulw.: **Swoboda, Griech. Geschichte.** Schon der Name und der Ruf des Verfassers bürgt dafür, daß wir nicht etwa bloß eine trockene Kompilation vor uns haben, **überall zeigen sich die Spuren selbständiger Arbeit.**

Prakt. Schulmann: **Seyfert, Schulpraxis.** Es wird in **gedrängter Darstellung ein reicher, wohldurchdachter, den neuesten pädagogischen Bestrebungen gerecht werdender Inhalt** geboten und für den, der tiefer eindringen will, ist gesorgt durch reichhaltige Litteraturnachweise.

Zeitschr. f. d. Realschulw.: Es war ein glücklicher Gedanke der rührigen Verlagshandlung, die Abfassung des der Einführung in die **Arithmetik und Algebra** dienenden Bändchens ihrer „Sammlung" de[m] hochgeachteten Fach- und Schulmanne **Prof. Dr. Schubert** zu übertragen . . . . Der Verfasser wußte die Schwierigkeiten mit große[m] Geschick zu bewältigen, indem er durch einen **streng systematischen Aufbau** des arithmetischen Lehrgebäudes der Fassungskraft des Anfänger[s] möglichst Rechnung trug und dabei nur das Hauptsächliche ins Aug[e] faßte. — **Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik vo[n] Prof. Th. Bürklen** . . . . Die durch **reinen Druck** und **geschmackvoll[e] Ausstattung** sich auszeichnende **„Formelsammlung"** wird infolge ihre[s] **reichen vielseitigen Inhaltes**, ihrer **zweckentsprechenden Anordnung** un[d] **orientierenden Gliederung** als Nachschlagebuch vorzügliche Dienste leiste[n].

Grenzboten: **Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Ru[dolf] Kleinpaul.** Ein **lehrreiches Büchlein**, das in seinen engen Wänden . . **eine Fülle von Sprachbelehrung bietet**, die jeden fesseln muß, der n[ur] einigermaßen das Bedürfnis fühlt, sich über Sprachdinge Aufklärung [zu] verschaffen. Der Verfasser hat sich schon durch zahlreiche volkstümli[che] Bücher über die Sprache und ihr Leben bekannt gemacht, er hat ei[ne] ausgebreitete, sichere Kenntnis der Sprach- und Wortgeschichte, hat m[it] Ausdauer auf diesem Gebiete gesammelt und weiß seinen Stoff imme[r] geschickt zu gruppieren und vorzutragen. . . .

Staatsanzeiger: Die **Römische Litteraturgeschichte** ist eine **geistvolle glänzende Arbeit.** Einsender hat dieselbe von Anfang b[is] Ende mit größtem Genuß durchgelesen und dabei Art und Entwicklun[g] des römischen Schrifttums und damit des römischen Geisteslebens überhaupt besser und gründlicher verstehen gelernt, als durch manches vielstündige Universitätskolleg oder dickleibige Handbücher.

Meteorologische Zeitschrift: Trabert hat in der **Meteorologie** seine schwierige Aufgabe vortrefflich gelöst. In allen Fragen vertritt er den neuesten und letzten Standpunkt.

Schweizerische Lehrerzeitung: Wer die **Perspektive** [v]on Freyberger und das **Geometrische Zeichnen** von Becker [d]urchgeht, wird seine Freude daran haben. So viel für so wenig Geld [w]ird wohl kaum anderswo geboten. Die Illustrationen sind sauber [u]nd exakt. Der Text ist knapp und klar und auch da, wo er mehr an[de]utet als ausführt, anregend.

G. J. [illegible] Verlagshandlung, Leipzig.